Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2018

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Énoncez le critère de Cauchy pour la convergence des suites numériques.

ii. On considère la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx^2}}{k}$$

(a) Pour quelles valeurs de x cette série est-elle convergente ? Justifiez.

(b) Montrez que la série est dérivable terme à terme sur tout $[\alpha, \beta]$ ne comprenant pas l'origine.

iii. On considère une courbe $\mathcal{C}$ du plan XY de représentation paramétrique $(x(\psi), y(\psi))$ avec $x(\psi) > 0$, $y(\psi) > 0$, $\psi \in]\alpha, \beta[$ et x, $y \in C_1(]\alpha, \beta[)$.

Déterminez l'expression de l'aire de la surface générée par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe OX.

iv. Énoncez le théorème de Stokes.

Question II

On considère la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{\sqrt{k}\,\ln k}$$

i. Sur quel domaine cette série définit-elle une fonction f ?

ii. Déterminez le plus grand intervalle $\mathtt{E}$ tel que $f \in C_1(\mathtt{E})$.

iii. La fonction f présente-t-elle un extremum en $x = 3$? Justifiez et, le cas échéant, précisez la nature de cet extremum.

iv. Déterminez une valeur approchée de $f(5/2)$ entachée d'une erreur inférieure à 0.01.

Tournez la page.

Question III

i. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{(\sin x)^\alpha}\, dx$$

en discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx$$

en discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{dx}{1-x^2}$$

iv. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{y-x}{x^2+y^2} dxdy, \qquad \mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 < 1\}$$

Question IV

Représentez schématiquement

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2 \quad \text{et} \quad x^2+y^2 \leq 3Rz\right\}$$

et calculez son volume.

Question I

i. Le critère de Cauchy pour la convergence des suites numériques s'énonce de la façon suivante. La suite $\{u_k\}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, *i.e.* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq p \geq N) : \left|u_q - u_p\right| \leq \varepsilon$$

ii. (a) La série converge sur $\mathbb{R}_0$. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-kx^2}}{k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad (k \to \infty)$$

En $x = 0$, par contre, la série se réduit à la série harmonique et est donc divergente.

(b) Le théorème de dérivation terme à terme des séries est applicable sur tout $[\alpha, \beta]$ ne contenant pas l'origine. En effet, la série converge en chaque point d'un tel intervalle (et donc au moins en un point) et

$$\frac{\mathrm{e}^{-kx^2}}{k} \in C_1([\alpha, \beta])$$

La série des dérivées est donnée par

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

Pour tout $x \in [\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, on a

$$|x\,\mathrm{e}^{-kx^2}| \leq |\beta|\,\mathrm{e}^{-k\alpha^2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad (k \to \infty)$$

Si $[\alpha, \beta] \subset]-\infty, 0[$, le raisonnement peut être adapté en écrivant, $\forall x \in [\alpha, \beta]$,

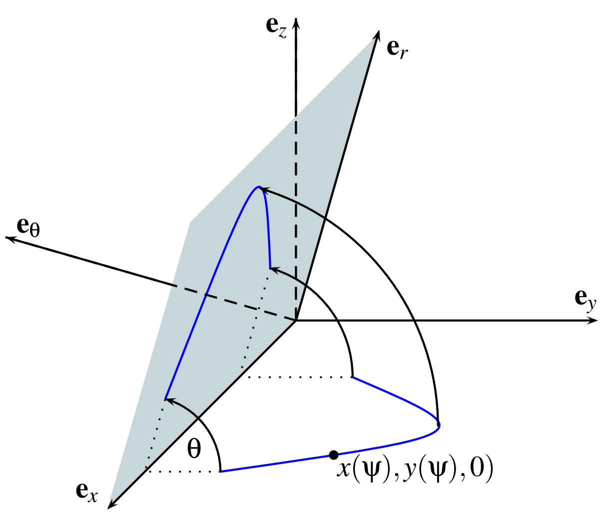
$$|x\,\mathrm{e}^{-kx^2}| \leq |\alpha|\,\mathrm{e}^{-k\beta^2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad (k \to \infty)$$

Dans les deux cas, le terme général de la série des dérivées est majoré par le terme général d'une série numérique convergente. Par le critère de Weierstrass, on en déduit que la série des dérivées converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

En conséquence, la dérivation terme à terme est licite sur tout $[\alpha, \beta]$ ne contenant pas l'origine, et donc sur $\mathbb{R}_0$.

iii. On peut introduire la paramétrisation

$$\mathbf{s}(\psi, \theta) = x(\psi)\mathbf{e}_x + y(\psi)\mathbf{e}_r(\theta), \qquad \psi \in]\alpha, \beta[,\ \theta \in]0, 2\pi[$$



telle que

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \psi} = x'(\psi)\mathbf{e}_x + y'(\psi)\mathbf{e}_r(\theta)$$
$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = y(\psi)\mathbf{e}_\theta(\theta)$$

puisque $\dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| &= \left\| -x'(\psi)y(\psi)\mathbf{e}_r + y(\psi)y'(\psi)\mathbf{e}_x \right\| \\ &= y(\psi)\sqrt{[x'(\psi)]^2 + [y'(\psi)]^2}\end{aligned}$$

et

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\alpha^\beta y(\psi)\sqrt{[x'(\psi)]^2 + [y'(\psi)]^2}d\psi = 2\pi \int_\alpha^\beta y(\psi)\sqrt{[x'(\psi)]^2 + [y'(\psi)]^2}d\psi$$

iv. Le théorème de Stokes s'énonce comme suit.
Si $\mathbf{F}$ est un champ vectoriel continûment dérivable sur un ouvert contenant la surface régulière Σ, alors

$$\iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

où $\partial\Sigma$ désigne le contour de la surface Σ orienté dans le sens compatible avec la règle de la main droite appliquée à la normale $\mathbf{n}$.

Question II

i. La série de puissances définit une fonction en chacun des points où elle converge.
L'application du critère du quotient à la série des modules donne

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|x-3|^{k+1}}{|x-3|^k} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \\ &= |x-3| \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} = |x-3|\end{aligned}$$

- La série converge donc (absolument) si $|x-3| < 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathtt{I} =]2,4[$ où $\mathtt{I}$ est l'intervalle de convergence de la série.
- La série diverge si $|x-3| > 1$ c'est-à-dire si $x \in]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$.
- Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|x-3| = 1$. Nous devons donc étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x = 4$ et $x = 2$.
  (a) Si $x = 4$, la série devient

  $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\,\ln k}$$

  dont le terme général vérifie

  $$\frac{1}{k} = o\left[\frac{1}{\sqrt{k}\,\ln k}\right], \quad (k \to \infty)$$

  ce qui permet de conclure à la divergence de la série.

(b) Si $x=2$, la série devient

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\,\ln k}$$

Il s'agit d'une série alternée qui converge puisque

$$\frac{1}{\sqrt{k}\,\ln k}$$

tend monotonément vers 0.

La série de converge donc simplement sur $[2,4[$ et définit une fonction sur cet intervalle.

ii. Nous savons qu'une série de puissances représente une fonction indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence ($]2,4[$ ici). Nous savons aussi que la fonction représentée par la série de puissances est continue sur son intervalle de convergence simple ($[2,4[$ ici). Par contre, la série des dérivées obtenue en dérivant terme à terme,

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k}\,\ln k}(x-3)^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\ln k}(x-3)^{k-1}$$

ne converge pas en $x=2$. En effet, on a

$$f'(2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\ln k}(-1)^{k-1}$$

dont le terme général ne tend pas vers zéro.

Nous en concluons donc que le plus grand intervalle $\mathtt{E}$ tel que $f \in C_1(\mathtt{E})$ est l'intervalle $]2,4[$.

iii. La série de puissances définit une fonction $f(x)$ indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence (qui contient ici le point $x=3$) et dont les dérivées successives se calculent en dérivant terme à terme. On obtient successivement

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\ln k}(x-3)^{k-1}, \qquad f'(3) = 0$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\ln k}(k-1)(x-3)^{k-2} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\ln k}(k-1)(x-3)^{k-2}$$

et

$$f''(3) = \frac{\sqrt{2}}{\ln 2} > 0$$

La première dérivée non nulle de la fonction en $x=3$ étant d'ordre pair et positive, la fonction y présente un minimum.

De façon alternative, on peut également noter que $f(x)$ se comporte asymptotiquement au voisinage de $x=3$ comme le premier terme de la série. On a

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}\ln 2} + o[(x-3)^2], \quad (x \to 3)$$

Dès lors, dans un voisinage suffisamment petit de $x=3$, f prend des valeurs positives de part et d'autre de $x=3$ où elle est nulle. Elle présente donc un minimum en ce point.

iv. On considère

$$f(5/2) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}-3\right)^k}{\sqrt{k}\,\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k\sqrt{k}\,\ln k}$$

La série étant alternée, l'erreur commise en tronquant la série est, en module, inférieure au module du premier terme négligé. On a donc

$$f(5/2) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^k\sqrt{k}\,\ln k} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| \le \frac{1}{2^n\sqrt{n}\,\ln n}$$

Recherchons la plus petite valeur de n pour laquelle

$$\frac{1}{2^n\sqrt{n}\,\ln n} < 0.01$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
n = 2, &\quad \frac{1}{2^2\sqrt{2}\,\ln 2} \simeq 0.255 > 0.01\\
n = 3, &\quad \frac{1}{2^3\sqrt{3}\,\ln 3} \simeq 0.066 > 0.01\\
n = 4, &\quad \frac{1}{2^4\sqrt{4}\,\ln 4} \simeq 0.023 > 0.01\\
n = 5, &\quad \frac{1}{2^5\sqrt{5}\,\ln 5} \simeq 0.009 < 0.01
\end{aligned}$$

On peut donc approcher $f(5/2)$ avec une erreur inférieure à 10^{-2} par

$$\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^k}{2^k\sqrt{k}\,\ln k} = \frac{1}{2^2\sqrt{2}\,\ln 2} - \frac{1}{2^3\sqrt{3}\,\ln 3} + \frac{1}{2^4\sqrt{4}\,\ln 4} \simeq 0.21$$

Question III

i. Soit
$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{(\sin x)^\alpha}\,dx$$
Nous constatons d'abord que, quel que soit α,
$$\frac{e^x}{(\sin x)^\alpha} \in C_0(]0,\pi/2])$$
Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de 0.

Puisque $\sin x \sim x$ pour $x \to 0$, on peut écrire
$$\frac{e^x}{(\sin x)^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}, \quad (x \to 0^+)$$
ce qui nous apprend que la fonction n'est pas intégrable dans le voisinage de 0 si $\alpha \geq 1$ mais qu'elle l'est si $\alpha < 1$.

En conclusion, l'intégrale existe si et seulement si $\alpha < 1$.

ii. Soit
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$$
Nous constatons d'abord que
$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \in C_0(]0,+\infty[)$$
Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité dans les voisinages de 0 et de $+\infty$.

- Au voisinage de 0, on peut écrire,
$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad (x \to 0^+)$$
et
$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}, \quad (x \to 0^+)$$
La fonction est donc intégrable au voisinage de 0 si $\alpha < 2$ et n'est pas intégrable si $\alpha \geq 2$.

- Au voisinage de $+\infty$, on peut écrire
$$\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2}, \quad (x \to +\infty)$$
et
$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha}, \quad (x \to +\infty)$$
La fonction est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ si $\alpha > 1$ et n'est pas intégrable si $\alpha \leq 1$.

En conclusion, l'intégrale existe si et seulement si $\alpha \in]1,2[$.

iii. Soit
$$\int_0^4 \frac{dx}{1-x^2}$$
Nous constatons d'abord que
$$\frac{1}{1-x^2} \in C_0([0,1[\cup]1,4])$$
Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de 1 où
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \sim \frac{1}{2(1-x)}, \quad (x \to 1)$$

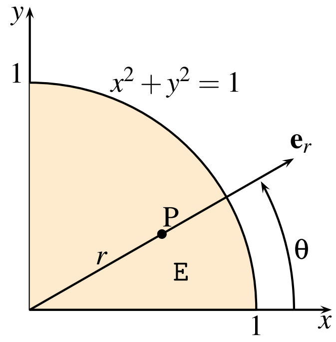
L'intégrale n'existe donc pas.

iv. Soit

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$$

$\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 < 1\}$

On constate que l'intégrand n'est pas continu sur $\bar{\mathtt{E}}$ puisqu'il n'est pas défini au point $(0,0)$.



Afin de décrire plus facilement le quart de disque, les coordonnées polaires sont utilisées (voir figure). Le domaine devient donc

$$\mathtt{E}' = \{(r,\theta) : r \in]0,1[\text{ et } \theta \in]0,\pi/2[$$

Le changement de variables ($x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$) entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires étant régulier entre les ouverts considérés, la justification de l'intégrabilité peut être réalisée après celui-ci. On a

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\mathtt{E}'} r\left(\frac{r\sin\theta - r\cos\theta}{r^2}\right)dr\,d\theta = \iint_{\mathtt{E}'}(\sin\theta-\cos\theta)\,dr\,d\theta$$

et cette intégrale existe puisque $(\sin\theta - \cos\theta)$ est continu sur la compact $\bar{\mathtt{E}}'$. Ceci assure l'existence de l'intégrale initiale.

De façon alternative, si le changement de variables n'est pas directement introduit, il est aussi possible de justifier l'intégrabilité en faisant appel au critère de Tonelli qui doit être appliqué à la fonction

$$|f| = \left|\frac{y-x}{x^2+y^2}\right| = \begin{cases} \dfrac{y-x}{x^2+y^2} = f & \text{si} \quad y \geq x \\ \dfrac{x-y}{x^2+y^2} = -f & \text{si} \quad x \geq y \end{cases}$$

Question IV

Le volume recherché s'exprime par

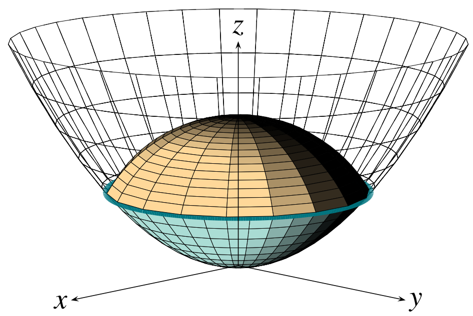
$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

où $\mathtt{E}$ est le domaine représenté ci-dessous compris à l'intérieur de la sphère

$$x^2+y^2+z^2 = 4R^2$$

et du paraboloïde

$$x^2+y^2 = 3Rz$$



La sphère et le paraboloïde se coupent à une hauteur z telle que la distance à l'axe OZ des deux surfaces est identique, soit

$$4R^2 - z^2 = 3Rz$$

ou encore

$$z^2 + 3Rz - 4R^2 = (z-R)(z+4R) = 0$$

dont la seule solution positive est $z = R$. L'intersection entre la sphère et le paraboloïde est un cercle de rayon $\sqrt{3}R$.

Le domaine $\mathtt{E}$ peut donc être découpé en deux sous-domaines : $\mathtt{E}_1$ délimité par la surface du paraboloïde pour $z \leq R$ et $\mathtt{E}_2$ délimité par celle de la sphère pour $z \geq R$. L'intégrale peut alors être réduite en considérant un empilement de cylindres infinitésimaux de section $\Sigma_1(z)$ dont le rayon est celui du paraboloïde à la hauteur z (quand $z \leq R$) et $\Sigma_2(z)$ dont le rayon est celui de la sphère à la hauteur z (quand $z \geq R$). On a

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathtt{E}_1} dxdydz + \iiint_{\mathtt{E}_2} dxdydz \\
&= \int_0^R dz \iint_{\Sigma_1(z)} dxdy + \int_R^{2R} dz \iint_{\Sigma_2(z)} dxdy \\
&= \int_0^R dz \iint_{\text{disque de rayon } \sqrt{3Rz}} dxdy + \int_R^{2R} dz \iint_{\text{disque de rayon } \sqrt{4R^2-z^2}} dxdy
\end{aligned}$$

soit, puisque les intégrales sur les disques de la fonction 1 représentent les aires de ces disques,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^R \pi\, 3Rz\, dz + \int_R^{2R} \pi(4R^2 - z^2)\, dz \\
&= \frac{3}{2}\pi R^3 + 4\pi R^3 - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_R^{2R} \\
&= \left(\frac{3}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\pi R^3 = \frac{19}{6}\pi R^3
\end{aligned}$$

De façon alternative, le domaine peut être décrit en coordonnées cylindriques.

- Une première méthode se base sur la description établie ci-dessus. On a

  $$\mathtt{E}_1 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq z \leq R \text{ et } 0 \leq r \leq \sqrt{3Rz}\}$$

  et

  $$\mathtt{E}_2 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ R \leq z \leq 2R \text{ et } 0 \leq r \leq \sqrt{4R^2 - z^2}\}$$

  de sorte que

  $$\begin{aligned}
  V &= \iiint_{\mathtt{E}_1} dxdydz + \iiint_{\mathtt{E}_2} dxdydz \\
  &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{3Rz}} r\, dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} r\, dr \\
  &= 2\pi \int_0^R \frac{3Rz}{2} dz + 2\pi \int_R^{2R} \frac{4R^2 - z^2}{2} dz \\
  &= \pi \int_0^R 3Rz\, dz + \pi \int_R^{2R} (4R^2 - z^2)\, dz
  \end{aligned}$$

  où l'on retrouve l'intégrale calculée ci-dessus.

- Il est également possible d'utiliser les coordonnées cylindriques avec

  $$\mathtt{E} = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq r \leq \sqrt{3}R \text{ et } \frac{r^2}{3R} \leq z \leq \sqrt{4R^2 - r^2}\}$$

  où les bornes de z correspondent respectivement au paraboloïde et à la sphère. Il vient dès lors

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}R} r\,dr \int_{r^2/3R}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} r \left(\sqrt{4R^2-r^2} - \frac{r^2}{3R} \right) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{-(4R^2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{12R} \right]_0^{\sqrt{3}R} \\
&= 2\pi R^3 \left(-\frac{1}{3} - \frac{9}{12} + \frac{8}{3} \right) = \frac{19}{6}\pi R^3
\end{aligned}
$$