Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2017

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Le non-respect des consignes ci-dessous sera sanctionné
par un retrait de 2 points sur la note globale.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Énoncez le théorème de Cauchy relatif à la convergence des suites numériques.

ii. Définissez le concept de convergence uniforme d'une série de fonctions.

iii. Définissez le concept de fonction intégrable et l'intégrale d'une fonction intégrable.

iv. Étudiez l'existence de l'intégrale

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha} \ln t}$$

en fonction du paramètre réel α.

v. Si $\mathbf{e}_r$ désigne le vecteur unitaire radial associé aux coordonnées cylindriques, montrez que

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r \, d\theta = \mathbf{0}$$

Question II

On considère la fonction définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+3}}{(4k+3)(2k+1)!}$$

i. Déterminez le domaine de définition de S.
ii. Calculez $S(1)$ avec une erreur maximale de 10^{-3}.
iii. Calculez $S'(x)$. Pour quelles valeurs de x cette expression est-elle valable ?
iv. Exprimez S' en termes de fonctions usuelles et déduisez-en une expression intégrale de S.

Question III

En justifiant chacune des étapes de votre raisonnement, calculez

$$I = \int_0^{\pi^2/4} dx \int_{2x/\pi}^{\pi/2} \sin\frac{x}{y} \, dy$$

Question IV

On considère un liquide de masse volumique $\rho > 0$ occupant entièrement un réservoir décrit par

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \ell(\ell - z), \quad z \geq 0\right\}$$

(où ℓ est une constante strictement positive) dont la surface est exposée à l'air libre. La coordonnée verticale z est mesurée positivement vers le bas et le vecteur unitaire $\mathbf{e}_z$ pointe donc également vers le bas. On note Σ la surface définissant le fond du réservoir et Σ_0 la surface libre du fluide, *i.e.* la projection de V sur le plan horizontal $z = 0$.

i. Esquissez V, Σ et Σ_0.

ii. Calculez le poids du liquide contenu dans le réservoir, *i.e.*

$$\mathcal{P} = \iiint_V \rho g dV$$

(où $g > 0$ est l'accélération de pesanteur, supposée constante).

iii. Sachant que la pression au sein du liquide varie selon

$$p(z) = p_{atm} + \rho g z$$

(où $p_{atm} > 0$ désigne la pression atmosphérique), calculez la composante verticale

$$F_z = \iint_\Sigma p(z)\, \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

($\mathbf{n}$ désigne la normale à Σ orientée vers le bas, *i.e.* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$) de la résultante des forces de pression agissant sur le fond du réservoir.

iv. Montrez que la résultante F_z calculée ci-dessus est liée à la résultante

$$F_z^0 = \iint_{\Sigma_0} p(0) d\sigma$$

évaluée au niveau de la surface libre par

$$F_z = F_z^0 + \mathcal{P} \qquad (\heartsuit)$$

v. Sans calculer explicitement aucune nouvelle intégrale, en appliquant le théorème de Gauss à la fonction $p\, \mathbf{e}_z$, montrez que la relation ($\heartsuit$) est un résultat général qui ne dépend pas de la forme particulière du réservoir.

Question I

i. Une suite numérique $\{x_k\}$ est convergente si et seulement si elle de Cauchy, *i.e.* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall q \geq p \geq N) : \left|x_p - x_q\right| \leq \varepsilon$$

ii. On dit que la série de fonctions f_k converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $\mathtt{I}$ lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall n \geq N) : \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

iii. Une fonction mesurable réelle f est dite intégrable lorsque les intégrales de ses parties positive $f^+ = \max(0, f)$ et négative $f^- = \max(0, -f)$ sont finies.
On définit l'intégrale d'une telle fonction par

$$\int f(\mathsf{x})d\mathsf{x} = \int f^+(\mathsf{x})d\mathsf{x} - \int f^-(\mathsf{x})d\mathsf{x}$$

iv. Quelle que soit la valeur du paramètre réel α,

$$\frac{1}{t^\alpha \ln t} \in C_0([\mathrm{e}, +\infty[)$$

de sorte que la fonction est intégrable sur $[\mathrm{e}, M]$ pour tout $M \geq \mathrm{e}$.

On a

$$\frac{1}{t^\alpha \ln t} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \qquad (t \to +\infty)$$

de sorte que la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout $\alpha > 1$.

Pour $\alpha < 1$, on a

$$\frac{1}{t} = o\left(\frac{1}{t^\alpha \ln t}\right) \qquad (t \to +\infty)$$

et la fonction n'est pas intégrable au voisinage de l'infini.

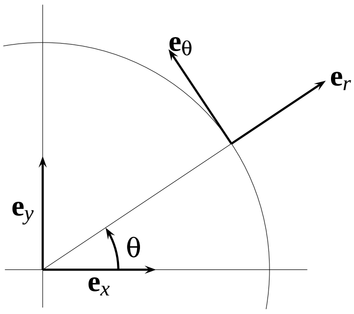
Pour $\alpha = 1$, on calcule (pour $t > 1$)

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t) + C$$

Puisque cette primitive n'admet pas de limite finie en $+\infty$, l'intégrale n'existe pas.

En conclusion, l'intégrale proposée existe si et seulement si $\alpha > 1$.

v. En projetant $\mathbf{e}_r$ sur les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ de la base cartésienne, on a



$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y$$

de sorte que

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \;\; \mathbf{e}_x + \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \;\; \mathbf{e}_y$$
$$= \Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi} \mathbf{e}_x - \Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi} \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$$

De façon alternative, on peut noter que

$$\mathbf{e}_r(\theta) = -\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_\theta(\theta)$$

de sorte que

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} d\theta = \Big[-\mathbf{e}_\theta(\theta)\Big]_0^{2\pi} = \mathbf{e}_\theta(0) - \mathbf{e}_\theta(2\pi) = \mathbf{0}$$

Question II

i. La fonction est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique correspondante converge. Comme la série est de signe variable, appliquons le critère du quotient à la série des modules :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= |x|^4 \lim_{k\to+\infty} \frac{(4k+3)}{(4k+7)} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} \\ &= |x|^4 \lim_{k\to+\infty} \frac{(4k+3)}{(4k+7)(2k+3)(2k+2)} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La limite étant strictement inférieure à 1, la série converge (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la fonction S est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. On considère

$$S(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!}$$

La série étant alternée, l'erreur commise en tronquant la série est, en module, inférieure au module du premier terme négligé. On a donc

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| \leq \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!}$$

L'erreur ε est inférieure à 10^{-3} si $(4n+3)(2n+1)! > 1000$, ce qui est le cas pour $n \geq 2$. On peut donc approcher $S(1)$ avec une erreur inférieure à 10^{-3} par

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!} = \frac{1}{3\cdot 1!} - \frac{1}{7\cdot 3!} = \frac{13}{42} \approx 0.31$$

iii. Une série de puissances est indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence, ici $\mathbb{R}$, et y est dérivable terme à terme. Dès lors, il vient

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

iv. Par comparaison avec le développement de la fonction sinus, *i.e.*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

on a

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dès lors

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt + C$$

De $S(0) = 0$, on déduit que la constante C est nulle. Dès lors,

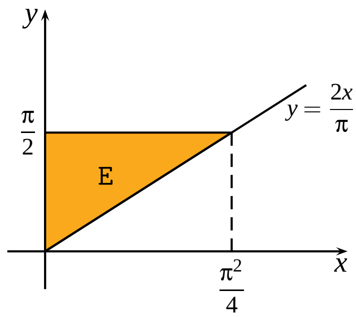
$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Question III

L'intégrale proposée ne peut être évaluée comme telle. Par contre, on peut espérer la calculer en renversant l'ordre des intégrations partielles.

L'intégrale peut être interprétée comme une réduction de l'intégrale double

$$I^\star = \iint_{\mathtt{E}} \sin\left(\frac{x}{y}\right)\, dxdy$$



où

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right], y \in \left[\frac{2x}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

pour autant que cette intégrale existe.

On constate que $\mathtt{E}$ est un compact mais que l'intégrand n'est pas continu sur $\mathtt{E}$ puisqu'il n'est pas défini sur la droite d'équation $y = 0$. Pour justifier l'existence de $I^\star$, on fait donc appel au critère de Tonelli.

Le critère de Tonelli fait normalement référence au module de l'intégrand. Cependant, presque partout sur $\mathtt{E}$, on a

$$y > \frac{2x}{\pi} > 0 \qquad \text{soit} \qquad 0 < \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$$

de sorte que

$$\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \sin\left(\frac{x}{y}\right) > 0$$

Dès lors, l'intégrale double $I^\star$ existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction qui a un sens.

Renversant l'ordre d'intégration, on considère

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\pi y/2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=\pi y/2} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

où les intégrales successives existent car il s'agit à chaque fois d'intégrer une fonction continue sur un compact. Par le critère de Tonelli, ceci justifie l'existence de l'intégrale double $I^\star$.

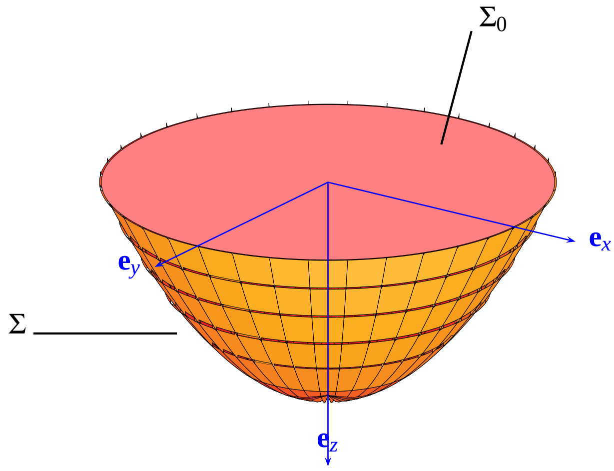
Par le théorème de Fubini, on sait que tous les ordres d'intégration partielle conduisent au même résultat de sorte que

$$I = \int_0^{\pi^2/4} dx \int_{2x/\pi}^{\pi/2} \sin\frac{x}{y} dy = I^\star = \frac{\pi^2}{8}$$

Question IV

i. Le réservoir V a la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe OZ situé sous le plan $z = 0$. La surface supérieure est constituée par le disque de rayon ℓ

$$\Sigma_0 = \left\{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le \ell^2\right\}$$



ii. Le poids du liquide contenu dans le réservoir est donné par

$$\mathcal{P} = \iiint_V \rho\, g\, dV = \rho g \iiint_V dV$$

Le volume V peut être décrit comme un empilement de cylindres élémentaires de rayon

$$R(z) = \sqrt{\ell(\ell - z)}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \rho g \iiint_V dV = \rho g \int_0^\ell \pi R^2(z) dz &= \rho g \int_0^\ell \pi \ell(\ell - z) dz \\ &= \pi\rho g \ell \left[\ell z - \frac{z^2}{2}\right]_0^\ell = \frac{1}{2}\pi\rho g \ell^3\end{aligned}$$

De façon alternative, en utilisant les coordonnées cylindriques et en tenant compte du Jacobien de la transformation, on peut calculer

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \rho\, g \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\ell dz \int_0^{R(z)} r\ dr \\ &= 2\pi\rho g \int_0^\ell \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\ell(\ell-z)}} dz \\ &= \pi\rho g \ell \int_0^\ell (\ell - z)\, dz \\ &= \pi\rho g \ell \left[\ell z - \frac{z^2}{2}\right]_0^\ell = \frac{1}{2}\pi\rho g \ell^3\end{aligned}$$

iii. La composante verticale de la résultante des forces de pression agissant sur le fond du réservoir est donnée par

$$F_z = \iint_\Sigma p(z)\mathbf{e}_z \cdot\ \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_\Sigma (p_{atm} + \rho g z)\, \mathbf{e}_z \cdot\ \mathbf{n}\, d\sigma$$

Pour calculer cette intégrale de surface, exploitons la paramétrisation de Σ

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(\theta, z) &= R(z)\ \mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z \\ &= \sqrt{\ell(\ell - z)}\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z\end{aligned} \qquad \theta \in]0, 2\pi[,\ \ z \in]0, \ell[$$

On calcule successivement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \sqrt{\ell(\ell - z)}\, \dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \sqrt{\ell(\ell - z)}\, \mathbf{e}_\theta \\ \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \dfrac{-\ell}{2\sqrt{\ell(\ell - z)}}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \end{cases}$$

et

$$\mathbf{n}\,d\sigma = \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right) d\theta\, dz = \left(\frac{\ell}{2}\mathbf{e}_z + \sqrt{\ell(\ell - z)}\,\mathbf{e}_r\right) d\theta\, dz$$

On vérifie que cette expression correspond bien à l'orientation souhaitée de la normale, *i.e.* telle que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$.
Dès lors,

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\ell} \left[p_{atm} + \rho g z\right]\ \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\ell}{2}\mathbf{e}_z + \sqrt{\ell(\ell - z)}\,\mathbf{e}_r\right) dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\ell} \left[p_{atm} + \rho g z\right] \frac{\ell}{2}\, dz \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} F_z &= \pi\ell \int_0^{\ell} \left(p_{atm} + \rho g z\right)\, dz \\ &= \pi\ell \left[p_{atm} z + \rho g \frac{z^2}{2}\right]_0^{\ell} \\ &= p_{atm}\pi\ell^2 + \frac{1}{2}\pi\rho g \ell^3 \end{aligned}$$

iv. La résultante évaluée au niveau de la surface libre du liquide est donnée par

$$F_z^0 = \iint_{\Sigma_0} p(0) d\sigma$$

où $p(0) = p_{atm}$ et où Σ_0 désigne un disque de rayon ℓ de sorte que

$$F_z^0 = p_{atm} \iint_{\Sigma_0} d\sigma = p_{atm}\pi\ell^2$$

On vérifie donc que, comme annoncé,

$$F_z = F_z^0 + \mathcal{P}$$

v. Le théorème de Gauss appliqué à la fonction $\mathbf{G} = p(z)\mathbf{e}_z$ s'écrit

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{G}\, dV = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale pointant vers l'extérieur de V.
Puisque

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

on a d'une part

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{G}\, dV = \iiint_V \rho g dV = \mathcal{P} \tag{†}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{\Sigma} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_0} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma} p(z)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_0} p(0)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma} p(z)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma - \iint_{\Sigma_0} p(0)\, d\sigma \qquad (1) \\ &= F_z - F_z^0 \qquad (‡) \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ sur la surface supérieure Σ_0.
En égalant les deux expressions (†) et (‡), il vient

$$F_z = F_z^0 + \mathcal{P}$$

indépendamment de la forme précise du réservoir.