Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2022

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*

Question Ia

i. Définissez le concept de suite numérique de Cauchy et énoncez le critère de convergence correspondant.

ii. Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k}$$

(a) Démontrez que cette série converge simplement sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

(b) Démontrez que la série est dérivable terme à terme sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Question Ib

i. On décrit l'écoulement d'un fluide dans un domaine $\mathtt{E}$ par le champ vectoriel $\mathbf{v} \in C_1(\mathtt{E})$ de la vitesse du fluide.

(a) Donnez l'écriture mathématique de la circulation de $\mathbf{v}$ sur une courbe régulière fermée $\mathcal{C}$ tracée au sein de $\mathtt{E}$.

(b) Montrez que, au prix d'éventuelles hypothèses additionnelles à préciser, cette circulation est nulle si l'écoulement est irrotationnel, *i.e.* si le rotationnel de la vitesse est nul en chaque point de $\mathtt{E}$.

ii. Si $\mathbf{e}_\theta$ désigne le vecteur unitaire azimutal du trièdre $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques, calculez

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\theta \, d\theta$$

Question II

On considère la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x+1)^k}{k+2}$$

i. Sur quel domaine $\mathtt{E}$ la série définit-elle une fonction f ?

ii. Étudiez la continuité de la fonction f définie par la série.

iii. Déterminez (sans la calculer) une somme partielle approchant $f(0)$ avec une erreur maximale de 10^{-2}.

iv. Calculez $f'(-1/2)$. Justifiez.

v. Montrez que f est décroissante sur $\mathtt{E} \cap]-\infty, -1/2[$.

Tournez la page.

Question III

i. Étudiez l'existence de

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

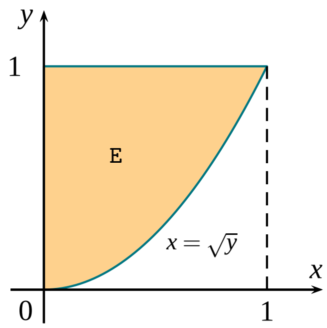
ii. Étudiez l'existence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}\, dx$$

iii. Étudiez l'existence de

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} dxdy$$

sur le domaine $\mathtt{E}$ représenté ci-contre en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.
La valeur de l'intégrale ne doit pas être calculée.



Question IV

Selon le principe d'Archimède, tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci une poussée verticale égale au poids du liquide déplacé. Dès lors, lorsqu'un corps flotte sur l'eau, la ligne de flottaison est telle que la masse totale m du corps est égale au produit de la masse par unité de volume ρ de l'eau et du volume immergé (*i.e.* sous la ligne de flottaison).

On considère un flotteur de masse m décrit par

$$x^2 + y^2 \leq 2az, \qquad 0 \leq z \leq H$$

où l'axe $\mathbf{e}_z$ est dirigé vers le haut et où a désigne une constante strictement positive représentant une longueur.

i. Esquissez le flotteur.

ii. Calculez le volume de la partie immergée du flotteur et montrez que la hauteur h de cette partie immergée (supposée inférieure à H) est donnée par

$$h = \sqrt{\frac{m}{\pi a \rho}}$$

iii. Calculez l'aire de la surface latérale du flotteur située sous la ligne de flottaison. Cette aire sera exprimée en fonction de a et h.

SOLUTION

Question Ia

i. Une suite numérique $\{x_k\}$ est convergente si et seulement si elle de Cauchy, *i.e.* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq p \geq N)\left|x_p - x_q\right| \leq \varepsilon$$

ii. On considère la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k}$$

(a) Le critère du quotient appliqué à la série des modules permet d'en justifier la convergence absolue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ puisque, pour tout x fixé dans $]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|\sin^{k+1} x|}{|\sin^k x|} \frac{k}{k+1} = |\sin x| < 1$$

(b) Cette série définit une fonction $f \in C_1(]-\pi/2, \pi/2[)$ et elle peut être dérivée terme à terme car elle vérifie les 3 hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions.

- $f_k(x) = \dfrac{\sin^k x}{k} \in C_1(]-\pi/2, \pi/2[$
- La série converge simplement sur $]-\pi/2, \pi/2[$ (voir (a)).
- La série des dérivées

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos x \sin^{k-1} x}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \cos x \sin^{k-1} x$$

converge uniformément sur tout $[a,b] \subset]-\pi/2, \pi/2[$ puisque son terme général y est majoré en module par le terme général d'une série numérique convergente (Critère de Weierstrass). On a en effet

$$|\cos x \sin^{k-1} x| \leq |\sin^{k-1} x| \leq r^{k-1},\ \forall x \in [a,b]$$

où

$$r = \max_{x\in[a,b]\subset\,]-\pi/2,\pi/2[}\ |\sin x|\ < 1$$

de sorte que r^{k-1} est le terme général d'une série géométrique convergente (de raison inférieure à 1).

Les hypothèses du théorème étant rencontrées sur tout $[a,b] \subset]-\pi/2, \pi/2[$, elles garantissent la dérivabilité terme à terme sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Question Ib

i. (a) La circulation s'écrit mathématiquement

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}$$

(b) Si $\nabla\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}$ dans $\mathtt{E}$ et si $\mathtt{E}$ est simplement connexe alors $\mathbf{v}$ dérive d'un potentiel scalaire, *i.e.* il existe $\phi\in C_2(\mathtt{E})$ tel que $\mathbf{v}=\nabla\phi$.

Par le théorème fondamental des intégrales curvilignes, on en déduit que

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=\oint_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{s}=\phi(\mathbf{s}_2)-\phi(\mathbf{s}_1)=0$$

quelle que soit la courbe régulière $\mathcal{C}$ fermée tracée dans $\mathtt{E}$ puisque $\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1$.

De façon alternative, on peut raisonner de la manière suivante.

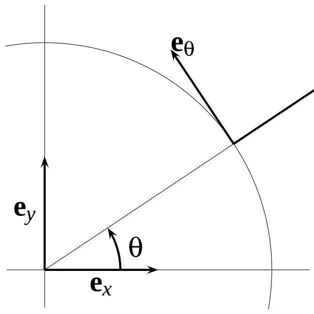
S'il existe une surface Σ régulière par morceaux s'appuyant sur $\mathcal{C}$ et entièrement comprise dans $\mathtt{E}$, et si $\nabla\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}$ dans $\mathtt{E}$ on a, par le théorème de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}=\iint_\Sigma(\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0$$

où le sens de la normale $\mathbf{n}$ est compatible avec la règle de la main droite appliquée au sens de parcours de C.

Notons que l'hypothèse d'existence d'une surface $\Sigma\subset\mathtt{E}$ est satisfaite si et seulement si $\mathcal{C}$ est une courbe réductible.

ii. En projetant $\mathbf{e}_\theta$ sur les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ de la base cartésienne, on a



$$\mathbf{e}_\theta=-\sin\theta\,\mathbf{e}_x+\cos\theta\,\mathbf{e}_y$$

de sorte que

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{e}_\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}-\sin\theta\,d\theta\;\;\mathbf{e}_x+\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\;\;\mathbf{e}_y$$
$$=\Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi}\mathbf{e}_x+\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}\mathbf{e}_y=\mathbf{0}$$

De façon alternative, on peut noter que

$$\mathbf{e}_\theta(\theta)=\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r(\theta)$$

de sorte que

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{e}_\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}d\theta=\Big[\mathbf{e}_r(\theta)\Big]_0^{2\pi}=\mathbf{e}_r(2\pi)-\mathbf{e}_r(0)=\mathbf{0}$$

Question II

Soit la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x+1)^k}{k+2}$$

i. Cette série définit une fonction pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elle converge. L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à considérer

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k+3}\frac{|2x+1|^{k+1}}{|2x+1|^k}=|2x+1|^-$$

On en déduit que

- la série converge absolument si $|2x+1|<1$, c'est-à-dire sur l'intervalle de convergence $\mathtt{I}=]-1,0[$;
- la série diverge (avec et sans module) si $|2x+1|>1$, c'est-à-dire sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|2x+1|=1$. Il convient donc d'étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x=-1$ et $x=0$.

En $x=-1$, la série prend la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+2}$$

Elle est donc divergente puisque son terme général est asymptotique au terme général de la série harmonique qui diverge.

En $x=0$, la série s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+2}$$

Cette série est une série alternée qui ne converge pas absolument puisque le module de son terme général est asymptotique au terme général de la série harmonique (voir le cas $x=-1$). Par contre, étant donné que le module du terme général de cette série alternée tend monotonément vers 0, la série est semi-convergente.

En conclusion, la série de puissances converge sur $\mathtt{E}=]-1,0]$ qui constitue donc le domaine de la fonction définie par la série.

ii. La série donnée étant une série de puissances convergeant sur $]-1,0]$, elle définit une fonction continue sur $]-1,0]$.

iii. La valeur de la fonction f en $x=0$ est donnée par

$$f(0)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+2}$$

Il s'agit d'une série alternée convergente dont le module du terme général tend monotonément vers 0. L'erreur commise en approchant cette série par une de ses sommes partielles est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit

$$f(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+2}+\varepsilon \quad \text{avec} \quad |\varepsilon|\leq\frac{1}{n+3}$$

Dès lors, $n=97$ est la plus petite valeur de n pour laquelle

$$\frac{1}{n+3}\leq 10^{-2}$$

On peut donc approcher $f(0)$ avec une erreur inférieure à 10^{-2} par

$$\sum_{k=0}^{97}(-1)^k\frac{1}{k+2}$$

iv. Toute série de puissances peut être dérivée terme à terme sur son intervalle de convergence. Sur $\mathtt{I}=]-1,0[$, on a donc

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k(2x+1)^{k-1}}{k+2}$$

Puisque $-1/2\in\mathtt{I}$, on a

$$f'(-1/2)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k(2x+1)^{k-1}}{k+2}\right]_{x=-1/2}=-\frac{2}{3}$$

vu que le seul terme non nul de la somme est celui correspondant à $k=1$.

v. Sur $\mathtt{E}\cap]-\infty,-1/2[=]-1,-1/2[$, on a $2x+1<0$ de sorte que

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k(2x+1)^{k-1}}{k+2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(-1)^{k-1}\frac{2k|2x+1|^{k-1}}{k+2}\\&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{k+2}|2x+1|^{k-1}<0\end{aligned}$$

La fonction est donc décroissante sur cet intervalle.

Question III

i. Soit

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

On a

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\in C_0(]0,1/2])$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $]0,1/2]$. Il faut encore étudier l'intégrabilité au voisinage de 0. On peut écrire

$$\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right),\quad(x\to 0^+)$$

et donc

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right),\quad(x\to 0^+)$$

de sorte que l'intégrale existe.

ii. Soit

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}\,dx$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}\in C_0([2,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $[2,+\infty[$. Il faut encore étudier l'intégrabilité au $V(+\infty)$. On peut écrire

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}\right), \quad (x \to +\infty)$$

puisque

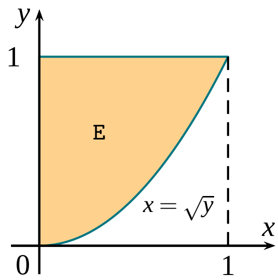
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} = 0$$

de sorte que l'intégrale n'existe pas.

iii. On se propose d'étudier l'existence de l'intégrale

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} dxdy$$

sur le domaine $\mathtt{E}$ représenté ci-contre.



Pour les valeurs de $\beta \leq 0$, l'intégrande est continu ou admet un prolongement continu sur le compact $\mathtt{E}$. Ceci permet de justifier l'existence de l'intégrale dans ce cas. Cet argument n'est pas valable pour β quelconque.

De façon générale, on fait dès lors appel au critère de Tonelli qui permet de justifier l'existence de l'intégrale si on trouve un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a du sens. On remarque cependant que

$$\left|\frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2}\right| = \frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} \geq 0 \text{ sur } \mathtt{E}$$

Nous pouvons décrire le domaine en faisant varier y de 0 à 1 et, pour y fixé, x de 0 à $\sqrt{y}$, ce qui conduit à la réduction

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} dx$$

La première intégrale existe puisque, pour presque tout y dans $[0,1]$,

$$\frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} \in C_0([0,\sqrt{y}])$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{y^{\beta}(1+x^2y^2)^2} dx &= \left[-\frac{1}{2y^{\beta+2}(1+x^2y^2)}\right]_0^{\sqrt{y}} \\
&= -\frac{1}{2y^{\beta+2}(1+y^3)} + \frac{1}{2y^{\beta+2}} = \frac{1}{2y^{\beta+2}}\left(1-\frac{1}{1+y^3}\right) \\
&= \frac{1}{2y^{\beta+2}}\frac{y^3}{1+y^3} = \frac{1}{2y^{\beta-1}(1+y^3)}
\end{aligned}$$

Il faut ensuite examiner l'existence de

$$\int_0^1 \frac{1}{2y^{\beta-1}(1+y^3)} dy$$

Remarquons d'abord que

$$\frac{1}{2y^{\beta-1}(1+y^3)} \in C_0(]0,1])$$

Il faut donc encore vérifier l'intégrabilité au voisinage de 0 où

$$\frac{1}{2y^{\beta-1}(1+y^3)} \sim \frac{1}{2y^{\beta-1}}, \qquad (y \to 0^+)$$

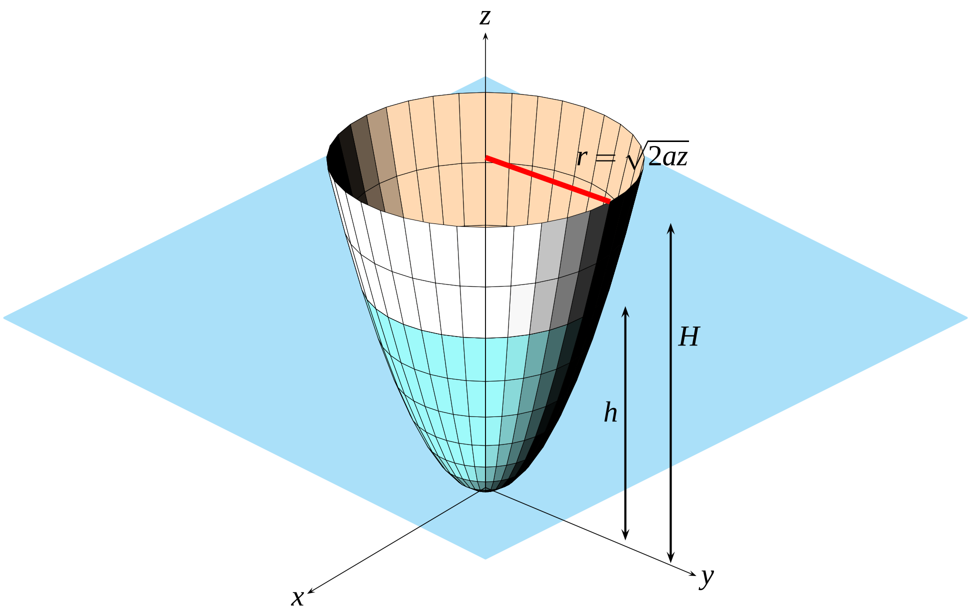
de sorte que cette deuxième intégrale partielle existe si $\beta < 2$ et n'existe pas si $\beta \geq 2$.

Si $\beta < 2$, l'intégrale double existe en vertu du critère de Tonelli. Le critère de Tonelli ne permet cependant pas de conclure directement à la non-existence de l'intégrale double quand $\beta \geq 2$ car il ne donne qu'une condition suffisante d'intégrabilité. On peut cependant conclure que l'intégrale double n'existe pas pour ces valeurs de β puisque, si elle existait, le théorème de Fubini assurerait l'existence des intégrales simples successives quel que soit l'ordre d'intégration partielle choisi.

En conclusion, l'intégrale double proposée existe si et seulement si $\beta < 2$.

Question IV

i. Le flotteur est l'intérieur d'un paraboloïde d'axe vertical tel qu'illustré ci-dessous. Pour toutes les valeurs de $z \in [0, H]$, la section est un disque dont le rayon augmente avec z selon $r(z) = \sqrt{2az}$.



ii. Le volume de la partie immergée du flotteur, notée $\mathtt{E}$, s'exprime par

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

L'intégrale existe puisque l'intégrande ($= 1$) est continu sur le compact $\mathtt{E}$.

La symétrie de révolution de $\mathtt{E}$ autour de l'axe vertical conduit naturellement à utiliser des coordonnées cylindriques pour étudier ce problème. En coordonnées cylindriques, le domaine est décrit par

$$\mathtt{E}' = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq z \leq h,\ 0 \leq r \leq \sqrt{2az}\}$$

En prenant en compte le Jacobien $J = r$ associé au changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned} V = \iiint_{\mathtt{E}} dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^{\sqrt{2az}} r\,dr \\ &= 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2az}} dz = \pi \int_0^h 2az\,dz \\ &= 2\pi a \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \pi a h^2 \end{aligned}$$

Par application du principe d'Archimède, la hauteur h de la partie immergée est donc telle que

$$m = \rho V = \rho \pi a h^2$$

soit

$$h = \sqrt{\frac{m}{\pi a \rho}}$$

iii. La symétrie de révolution suggère encore d'utiliser une paramétrisation de la surface latérale du flotteur basée sur les coordonnées cylindriques. Le vecteur position d'un point de la surface latérale immergée est donné par

$$\mathbf{s}(\theta, z) = r(z)\,\mathbf{e}_r(\theta) + z\,\mathbf{e}_z$$

où $r(z) = \sqrt{2az}$ de sorte que

$$\mathbf{s}(\theta, z) = \sqrt{2az}\,\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \qquad \text{avec} \qquad \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [0, h]$$

Il vient dès lors successivement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \sqrt{2az}\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{z}}\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = -a\mathbf{e}_z + \sqrt{2az}\,\mathbf{e}_r, \qquad \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| = \sqrt{a^2 + 2az}$$

L'aire latérale de la surface immergée vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| d\theta\,dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \sqrt{a^2 + 2az}\ dz \\ &= 2\pi \left[\frac{\left(a^2 + 2az\right)^{3/2}}{3a} \right]_0^h \\ &= \frac{2\pi}{3a} \left[\left(a^2 + 2ah\right)^{3/2} - a^3 \right] \end{aligned}$$