LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2017

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Si l'application du critère du quotient à la série des modules correspondant à une série numérique de signe variable permet de conclure à la divergence de la série des modules, peut-on en déduire que la série de signe variable diverge ?
Justifiez votre réponse en repartant de l'énoncé du critère du quotient.

ii. Montrez que, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument, alors on peut intégrer terme à terme la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.

iii. Si $\mathcal{C}$ désigne une courbe de $\mathbb{R}^3$ régulière et de longueur finie et si $f \in C_2(\mathbb{R}^3)$, que vaut

$$\iiint_{\mathcal{C}} \nabla f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \ ?$$

iv. Établissez la formule permettant de calculer l'aire de la surface obtenue par la rotation autour de l'axe OY de la partie du graphique de la fonction $y = f(x) \in C_1([a,b])$ comprise entre les abscisses a et b avec $0 < a < b$.

Question II

Soit la série

$$x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k-1)}$$

i. Déterminez le plus grand ensemble $\mathtt{E}$ sur lequel cette série définit une fonction f.

ii. Étudiez la convergence uniforme de la série.

iii. Montrez, en justifiant, que f vérifie une relation du type

$$(1+x)f'(x) - f(x) = \alpha + x$$

où α désigne une constante à déterminer.
Sur quel intervalle la série constitue-t-elle la solution de l'équation différentielle ? Justifiez votre réponse.

Question III

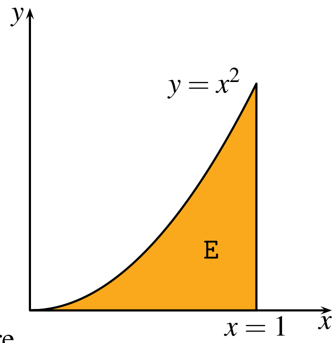
Étudiez l'existence des intégrales suivantes, en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre α.

i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ii. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

iii. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^\alpha \operatorname{th} x}\,dx$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

iv. $\displaystyle\iint_{\mathtt{E}} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où $\mathtt{E}$ désigne le domaine représenté ci-contre.



Question IV

On considère le champ vectoriel

$$\mathbf{F} = \alpha(-y^2\mathbf{e}_x + x\ell\mathbf{e}_y)$$

et l'intégrale

$$I = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où la surface Σ est l'intersection de

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2\}$$

et de

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z = 2\ell\}$$

(α, R et ℓ désignent des constantes strictement positives avec $2\ell > R$) et où $\mathbf{n}$ désigne la normale à la surface Σ telle que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z > 0$.

i. Esquissez graphiquement V, Π et Σ.

ii. Introduisez une paramétrisation appropriée de Σ et calculez I.

iii. Montrez que l'intégrale I est égale au flux du rotationnel de $\mathbf{F}$ à travers la projection orthogonale Σ_0 de Σ sur le plan $z = 0$.

iv. Exprimez I sous la forme d'une intégrale curviligne et montrez par votre calcul que cette intégrale conduit à un résultat identique à celui obtenu en ii.

Question I

i. Oui, si on peut conclure à la divergence de la série $\sum |u_k|$ par application du critère du quotient, alors la série $\sum u_k$ diverge également.
En effet, le critère du quotient permet de conclure à la divergence de la série numérique $\sum |u_k|$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \geq 1 \qquad \forall k \geq N$$

Dans ce cas, la suite des $|u_k|$ est croissante et ne tend pas vers zéro. La suite des u_k ne peut dès lors elle-même tendre vers zéro. Dès lors, comme son terme général ne tend pas vers zéro, la série $\sum u_k$ diverge.

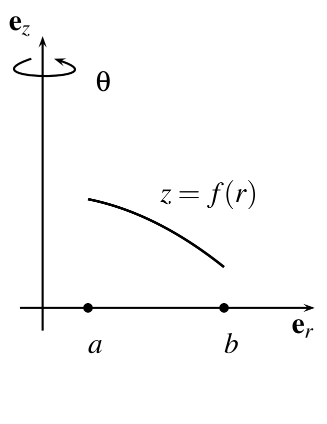
ii. La convergence absolue de la série $\sum a_k$ signifie que la série $\sum |a_k|$ est convergente. Par application du critère de Weierstrass, on peut affirmer que la série $\sum a_k \sin kx$ converge uniformément (et absolument) sur tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ puisque

$$|a_k \sin kx| \leq |a_k| \qquad \forall x \in [a,b]$$

i.e. son terme général est majoré par le terme général d'une série numérique convergente.
Puisque $a_k \sin kx \in C_0([a,b])$ et que la série $\sum a_k \sin kx$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série peut être intégrée terme à terme sur $[a,b]$.

iii. L'intégrale est nulle puisque le domaine d'intégration correspondant à la courbe $\mathcal{C}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^3$.

iv. La surface générée par la rotation autour de OY de la partie du graphique de $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$ peut être paramétrée en s'inspirant des coordonnées cylindriques selon



$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\mathbf{e}_r(\theta) + f(r)\mathbf{e}_z$$

$$\theta \in]0, 2\pi[, \; r \in]a,b[$$

On calcule

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r + f'(r)\mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| = \left\| r\mathbf{e}_z - rf'(r)\mathbf{e}_r \right\| = r\sqrt{1 + [f'(r)]^2}$$

Dès lors,l'aire recherchée est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r\sqrt{1+[f'(r)]^2}\,dr = 2\pi \int_a^b r\sqrt{1+[f'(r)]^2}\,dr$$

Question II

i. Le terme x étant défini sur $\mathbb{R}$, l'expression donnée définit une fonction f en chacun des points où la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k-1)}$$

converge.
L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à considérer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)k} \frac{k(k-1)}{|x|^k} = |x|$$

- La série converge absolument si $|x| < 1$, c'est-à-dire si $x \in]-1,1[$. L'ouvert $\mathtt{I} =]-1,1[$ constitue l'intervalle de convergence de la série.
- La série diverge si $|x| > 1$ c'est-à-dire si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
- Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|x| = 1$.

  Nous devons donc étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x = \pm 1$. Les séries s'écrivent

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(\pm 1)^k}{k(k-1)}$$

  où

$$\frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad k \to \infty$$

  Les deux séries numériques convergent donc absolument.

En conclusion, la série converge sur $\mathtt{E} = [-1,1]$ et l'expression donnée définit une fonction sur cet intervalle.

ii. En tant que série de puissances, la série converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,1[$.
Toute série de puissances convergeant en une extrémité $\tilde{x}$ de son intervalle de convergence $\mathtt{I}$ converge également uniformément sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta] \subset \mathtt{I} \cup \{\tilde{x}\}$. Dès lors, la convergence est également uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[-1,1]$.

iii. Toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable dans son intervalle de convergence, la dérivation s'effectuant terme à terme. Ainsi, sur $]-1,1[$, nous avons

$$f'(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{k-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) - f(x) =& (1+x)\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{k-1}\right) - x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k-1)} \\ =& 1 + x + (1+x)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{k-1} - x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k-1)} \\ =& 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k-1)}\end{aligned}$$

En vue de faire apparaître x^k dans chaque somme, remplaçons $k-1$ par k dans la première qui s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

ou encore, pour faire apparaître la même valeur initiale de l'indice sommatoire que dans les autres sommes,

$$x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) - f(x) =& 1+x+\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k(k-1)}\right)(-1)^k x^k \\ =& 1+x+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-(k-1)+k-1}{k(k-1)}\right)(-1)^k x^k = 1+x\end{aligned}$$

qui correspond à l'équation différentielle donnée à condition de prendre $\alpha = 1$.

La fonction f vérifie l'équation différentielle sur l'intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,1[$ de la série où la dérivation terme à terme peut être réalisée.
En $x=-1$, la série des dérivées s'écrit

$$1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^{k-1}}{k-1} = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}$$

où

$$\frac{1}{k-1} \sim \frac{1}{k}, \quad k \to \infty$$

La série des dérivées diverge donc en $x=-1$ et ne saurait constituer la solution de l'équation différentielle.
En $x=1$, on a

$$f'(1) = 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-1}$$

où la série converge simplement en tant que série alternée dont le terme général tend monotonément vers 0.
La dérivation terme à terme est donc également licite en $x=1$.
On en déduit que la série donnée constitue la solution de l'équation différentielle sur $]-1,1]$.

Question III

i. Soit

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nous constatons d'abord que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in C_0([0,1[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $[0,1[$. Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de 1 où on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (x \to 1^-)$$

ce qui assure l'intégrabilité.

ii. Soit

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$$

Nous constatons d'abord que

$$\frac{1}{\ln x} \in C_0(]0,1[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $]0,1[$. Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité aux voisinages de 0 et de 1.

Au voisinage de 0, on peut écrire

$$\frac{1}{\ln x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (x \to 0^+)$$

ce qui assure l'intégrabilité dans ce voisinage.

Au voisinage de 1, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\ln x \sim \ln 1 + \left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}(x-1), \quad (x \to 1^-)$$

soit

$$\ln x \sim x-1, \quad (x \to 1^-)$$

et

$$\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}, \quad (x \to 1^-)$$

de sorte que l'intégrale n'existe pas.

iii. Soit

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^\alpha \operatorname{th} x} dx$$

Nous constatons d'abord que, quelle que soit la valeur du paramètre α,

$$\frac{x^2-1}{x^\alpha \operatorname{th} x} \in C_0([2,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $[2,+\infty[$.

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ dans lequel on peut écrire

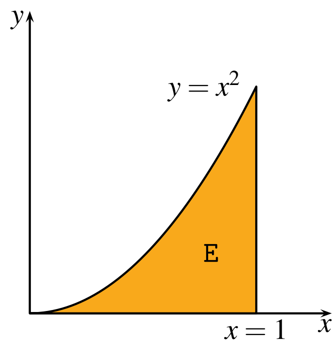
$$\frac{x^2-1}{x^\alpha \operatorname{th} x} \sim x^{2-\alpha}, \quad (x \to +\infty)$$

L'intégrale existe donc si et seulement si $\alpha > 3$.

iv. Soit

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy$$

On constate que E est un compact mais que l'intégrant n'est pas continu sur E puisqu'il n'est pas défini au point $(0,0)$.



Pour justifier l'existence de l'intégrale, le critère de Tonelli est appliqué à la fonction

$$\left|\frac{x-y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

puisque $x > y$ sur E. L'intégrale double proposée existe si les intégrales simples successives apparaissant dans

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$$

ont un sens.
Puisque

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} \in C_0([0,x^2]), \quad \forall x \neq 0$$

on a

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} \in \mathbb{L}_1(]0,x^2[) \text{ pour presque tout } x \in]0,1[$$

de sorte que la première intégrale partielle existe.
On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\int_0^{x^2} \frac{x-y}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2} dy - \int_0^{x^2} \frac{y}{x^2+y^2} dy \\
&= \int_0^{x^2} \frac{1/x}{1+(y/x)^2} dy - \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{2y}{x^2+y^2} dy \\
&= \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right]_0^{x^2} - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)\right]_0^{x^2} \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+x^4) + \frac{1}{2} \ln x^2 \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

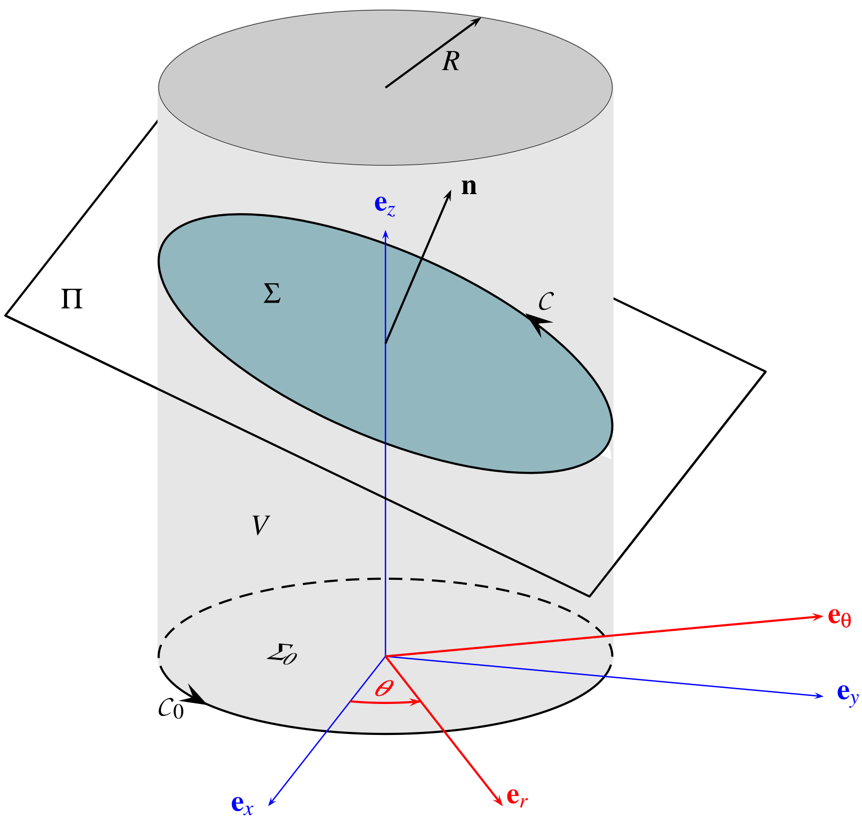
On doit donc considérer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right] dx$$

Cette intégrale existe puisque $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \in C_0([0,1])$.
Le critère de Tonelli permet donc de justifier l'existence de l'intégrale double proposée.

Question IV

i. V est le cylindrique d'axe OZ et de rayon R, Π est un plan parallèle à l'axe OX et Σ, leur intersection, est une surface elliptique située dans le plan Π et limitée par la surface cylindrique $x^2+y^2=R^2$.



ii. L'intégrale à calculer s'écrit

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad \text{où} \qquad \mathbf{F} = \alpha(-y^2 \mathbf{e}_x + x\ell \mathbf{e}_y)$$

On a

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x \ell) - \frac{\partial}{\partial y}(-\alpha y^2) \right) \mathbf{e}_z = (\alpha \ell + 2\alpha y)\mathbf{e}_z$$

La surface Σ à paramétrer est la portion du plan Π située à l'aplomb du disque Σ_0 de rayon R constituant l'intersection de V avec le plan $z = 0$. Les coordonnées cylindriques sont donc les plus adaptées pour décrire Σ. Elles sont définies par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et z où θ est l'angle que fait $\mathbf{e}_r$ par rapport à $\mathbf{e}_x$ et r la distance par rapport à l'axe OZ. On a

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

où l'expression de z est déterminée en utilisant l'équation du plan Π, soit

$$z = 2\ell - y = 2\ell - r\sin\theta$$

La surface est donc décrite par

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\mathbf{e}_r(\theta) + (2\ell - r\sin\theta)\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \theta \in]0, 2\pi[\text{ et } r \in]0, R[$$

On a alors

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right) dr$$

où l'intégrant doit être exprimé en fonction des paramètres indépendants r et θ soit, d'une part,

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = (\alpha\ell + 2\alpha y)\mathbf{e}_z = (\alpha\ell + 2\alpha r \sin\theta)\mathbf{e}_z$$

et, d'autre part,

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_z$$
$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\mathbf{e}_\theta - r\cos\theta \mathbf{e}_z$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (\mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_z) \wedge (r\mathbf{e}_\theta - r\cos\theta \mathbf{e}_z) = r\mathbf{e}_z + r\sin\theta \mathbf{e}_r + r\cos\theta \mathbf{e}_\theta$$

dont la composante selon $\mathbf{e}_z$ est bien positive. Finalement,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \big(\alpha\ell + 2\alpha r\sin\theta\big)\mathbf{e}_z \cdot \big(r\mathbf{e}_z + r\sin\theta \mathbf{e}_r + r\cos\theta \mathbf{e}_\theta\big) dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \big(\alpha\ell + 2\alpha r\sin\theta\big) r\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \big(\alpha\ell r + 2\alpha r^2 \sin\theta\big)\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\alpha\ell\frac{r^2}{2} + 2\alpha\frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\alpha\ell\frac{R^2}{2} + 2\alpha\frac{R^3}{3}\sin\theta \right] d\theta \\
&= \alpha\ell R^2 \pi
\end{aligned}$$

iii. Calculons

$$\iint_{\Sigma_0} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où Σ_0 est le disque de rayon R centré à l'origine des axes et situé dans le plan $z = 0$.
Puisque Σ_0 est un compact de $\mathbb{R}^2$, il est inutile d'introduire une paramétrisation. Il suffit de calculer l'intégrale double avec

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = (\alpha\ell + 2\alpha y)\mathbf{e}_z$$

et

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$$

soit

$$\iint_{\Sigma_0} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma_0} (\alpha\ell + 2\alpha y)\, dxdy$$

Afin de réduire plus facilement cette intégrale, nous passons en coordonnées polaires par le changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Il s'agit d'un changement de variables régulier d'ordre infini dont le Jacobien $J = r$.

Pour décrire le domaine, θ varie de 0 à 2π et r de 0 à R.

L'intégrale à calculer s'écrit alors

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (\alpha\ell + 2\alpha r\sin\theta) r\, dr$$

et est identique à l'intégrale du point précédent.

Ce résultat peut aussi être justifié en faisant appel au théorème de Stokes. Par ce théorème, on sait que le flux du rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{F}$ prend la même valeur s'il est évalué à travers des surfaces différentes s'appuyant sur une même courbe. En particulier, on a donc

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma_0} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_{lat}} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathcal{C}_0$ désigne le cercle entourant Σ_0 et Σ_{lat} désigne la surface latérale du cylindre comprise entre le plan horizontal $z = 0$ et le plan Π.

Sur Σ_{lat}, la normale $\mathbf{n}$ est horizontale alors que $\nabla \wedge \mathbf{F}$ est vertical. Dès lors,

$$\iint_{\Sigma_{lat}} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

et

$$\iint_{\Sigma_0} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_{lat}} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

iv. Le théorème de Stokes nous apprend que l'intégrale du flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface est égale à la circulation du champ vectoriel sur la courbe qui sous-tend cette surface à condition de choisir le sens de la normale à la surface et le sens de parcours de la courbe compatibles avec la règle de la main droite.

Puisque les intégrales de surface calculées en ii. et iii. sont identiques, nous appliquons le théorème de Stokes à l'intégrale sur la surface Σ_0. En effet, le calcul de la circulation de $\mathbf{F}$ sur le cercle $\mathcal{C}_0$ qui entoure Σ_0 est plus simple que celui de la circulation sur l'ellipse $\mathcal{C}$ entourant Σ.

On a donc

$$I = \iint_{\Sigma_0} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Sur le cercle $\mathcal{C}_0$, en coordonnées polaires,

$$\mathbf{s}(\theta) = R\mathbf{e}_r\,, \quad \theta \in]0, 2\pi[$$

où le sens de parcours du cercle est bien compatible avec la normale à la surface dirigée selon $\mathbf{e}_z$. On a alors

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\theta) \cdot \mathbf{s}'(\theta)\, d\theta$$

où

$$\mathbf{s}'(\theta) = R\,\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\mathbf{F}(\theta) = -\alpha R^2 \sin^2\theta\, \mathbf{e}_x + \alpha R\cos\theta\, \ell\, \mathbf{e}_y$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\theta)\cdot\mathbf{s}'(\theta) &= \Big[-\alpha R^2\sin^2\theta\,\mathbf{e}_x+\alpha R\cos\theta\,\ell\,\mathbf{e}_y\Big]\cdot R\mathbf{e}_\theta\\
&= -\alpha R^3\sin^2\theta(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_\theta)+\alpha R^2\cos\theta\,\ell(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_\theta)\\
&= -\alpha R^3\sin^2\theta(-\sin\theta)+\alpha R^2\cos\theta\,\ell(\cos\theta)\\
&= \alpha R^3\sin^3\theta+\alpha R^2\,\ell\cos^2\theta
\end{aligned}$$

L’intégrale curviligne s’écrit donc

$$\begin{aligned}
\oint_{C_0}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi}\Big[\alpha R^3\sin^3\theta+\alpha R^2\,\ell\cos^2\theta\Big]\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\left[\alpha R^3\sin\theta(1-\cos^2\theta)+\alpha R^2\,\ell\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\,d\theta\\
&= \left[-\alpha R^3\cos\theta+\alpha R^3\frac{\cos^3\theta}{3}+\alpha R^2\,\ell\frac{\theta}{2}+\alpha R^2\,\ell\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\\
&= \alpha\ell R^2\pi
\end{aligned}$$

où l’on retrouve, comme prévu, la valeur de I obtenue en ii. et iii.