Université de Liège

Juin 2016

# MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
# EXAMEN

*Durée de l'épreuve : 4 heures.*
*Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
*Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.*
*Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.*

## Question I

i. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, peut-on en déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge ? Justifiez.

ii. Définissez mathématiquement le concept de convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle $\mathtt{I}$ et introduisez la notation correspondante.

iii. Énoncez des conditions suffisantes pour pouvoir dériver terme à terme une série de fonctions.
Appliquez ces conditions au calcul de

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}\right]$$

iv. Définissez le concept de fonction intégrable au sens de Lebesgue dans le cas des fonctions mesurables réelles. Citez une fonction $f \in \mathbb{L}_1$ et une fonction $g \notin \mathbb{L}_1$.

v. Établissez la formule

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^R x\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

permettant de calculer l'aire d'une surface courbe obtenue par révolution autour de l'axe OZ de la partie du graphique de $z = f(x)$ comprise entre $x = 0$ et $x = R > 0$.

## Question II

On considère l'expression

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k^\alpha + 1}$$

où $\alpha$ désigne un paramètre réel strictement positif.

i. En discutant s'il y a lieu en fonction de $\alpha > 0$, déterminez le plus grand ensemble $\mathtt{E}$ sur lequel la série définit une fonction $f$. Sur quel intervalle la convergence est-elle absolue ? Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, montrez que

$$\frac{d}{dx}\left[x\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k^\alpha + 1}\right] = \beta \frac{x}{1+x^2}$$

pour une certaine constante $\beta$ à déterminer.
Déduisez-en une expression de $f$ en terme de fonctions connues. Dans quel domaine cette expression est-elle valable ? Justifiez.

## Question III

En justifiant chacune des étapes de votre démarche, calculez

$$I = \int_0^1 \left[ \int_{y^2}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \right] dy$$

## Question IV

Dans la base orthonormée constituée par les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, le champ de vitesse de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible est donné par

$$\mathbf{v} = \left[ U_\infty - \Gamma \frac{y}{x^2+y^2} \right] \mathbf{e}_x + \Gamma \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{e}_y$$

où $U_\infty$ et $\Gamma$ sont des constantes strictement positives.

i. Calculez

$$I_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

si $\mathcal{C}$ désigne la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R^2\}$$

orientée 'aire à gauche'.

ii. Montrez que la circulation de $\mathbf{v}$ sur toute courbe fermée $\mathcal{C}$ définissant un compact régulier $\mathtt{K}$ qui ne contient pas l'origine est nulle.

iii. Par application de la formule de Green à un domaine connexe, mais non simplement connexe, montrez que la circulation de $\mathbf{v}$ sur toute courbe fermée $\mathcal{C}$ définissant un compact régulier $\mathtt{K}$ contenant l'origine est indépendante de la courbe considérée. Justifiez.

Question I

i. La série numérique de terme général
$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$
est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général décroît monotonement vers zéro. Par contre, la série harmonique
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
est divergente.

Dès lors, la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ n'entraîne pas la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

ii. La suite des fonctions $f_k$ converge uniformément vers une fonction $f$ sur un ensemble $\mathtt{I}$, ce qui se note $f_k \overset{\mathtt{I}}{\Longrightarrow} f$, si et seulement si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

iii. La dérivabilité terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle $[a,b]$ est assurée par le théorème suivant :
$$\left.\begin{array}{l} f_k \in C_1([a,b]) \\ \exists x_0 \in [a,b], \alpha \in \mathbb{R} : \\ \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = \alpha \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} g \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists f \in C_1([a,b]) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} f(x_0) = \alpha \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} f \\ g = f' \text{ sur } [a,b] \end{array}\right.$$

La série des fonctions $f_k(x) = \dfrac{\cos(kx)}{k^3}$ vérifie les hypothèses de ce théorème sur $\mathbb{R}$. On a

- $f_k \in C_1(\mathbb{R})$
- La série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente
- La série des dérivées
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (Critère de Weierstrass), *i.e.*
$$\left| \frac{-\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$
où le membre de droite est le terme général d'une série de Riemann convergente.

On en conclut que les hypothèses sont vérifiées et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}\right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$

iv. Une fonction réelle et mesurable est dite intégrable au sens de Lebesgue si les intégrales de ses parties positive et négative sont finies, *i.e.* si
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int f^+(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int f^-(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} \in \mathbb{R} \end{array}\right. \qquad \text{où} \qquad \left\{\begin{array}{l} f^+ = \max(0, f) \\ f^- = \max(0, -f) \end{array}\right.$$

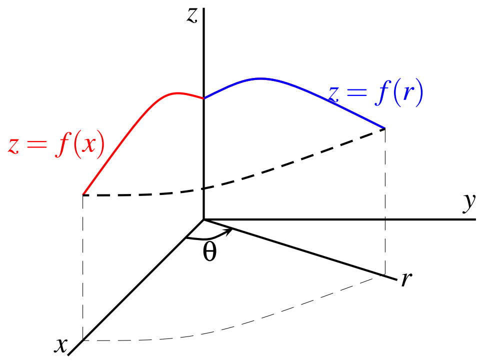
Dans ce cas, on écrit $f \in \mathbb{L}_1$ et on pose

$$\int f(x)\,dx = \int f^+(x)\,dx - \int f^-(x)\,dx$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2} \in \mathbb{L}_1$ puisque son intégrale est finie (égale à $\sqrt{\pi}$). Par contre, $g(x) = 1 \notin \mathbb{L}_1$ puisque son intégrale est infinie.

v. La surface générée par la rotation autour de $OZ$ de la partie du graphique de $z = f(x)$ comprise entre $x = 0$ et $x = R > 0$ peut être paramétrée en s'inspirant des coordonnées cylindriques selon

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\mathbf{e}_r(\theta) + f(r)\mathbf{e}_z, \qquad \theta \in [0, 2\pi[,\ r \in [0,R]$$




$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r + f'(r)\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| &= \| r\mathbf{e}_z - rf'(r)\mathbf{e}_r \| \\ &= r\sqrt{1 + [f'(r)]^2} \end{aligned}$$

Dès lors, l'aire recherchée est donnée, comme annoncé, par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\sqrt{1 + [f'(r)]^2}dr &= 2\pi \int_0^R r\sqrt{1 + [f'(r)]^2}dr \\ &= 2\pi \int_0^R x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que la variable d'intégration $r$ est muette et peut donc être remplacée par $x$.

## Question II

i. L'expression considérée définit une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles la série converge.

Appliquons le critère du quotient à la série des modules (puisque le terme général n'est pas positif pour tout $x$). On a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{2k+3}}{(k+1)^\alpha + 1}}{\dfrac{|x|^{2k+1}}{k^\alpha + 1}} = x^2 \lim_{k\to\infty} \frac{k^\alpha + 1}{(k+1)^\alpha + 1} = x^2$$

On en déduit que, quel que soit $\alpha > 0$, la série converge absolument sur l'intervalle $]-1, 1[$ qui constitue l'intervalle de convergence de la série, et diverge sur $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$.

En $x = \pm 1$, la série devient

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha + 1} \tag{♠}$$

Puisque

$$\left| \pm \frac{(-1)^k}{k^\alpha + 1} \right| = \frac{1}{k^\alpha + 1} \sim \frac{1}{k^\alpha}, \qquad (k \to \infty)$$

on déduit de la comparaison avec les séries de Riemann que la série converge absolument en $x = \pm 1$ si et seulement si $\alpha > 1$.

La série (♠) converge en tant que série alternée quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$ puisque le module du terme général décroît monotonément vers zéro.
Dès lors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k^\alpha + 1}$$

est définie sur $\mathtt{E} = [-1, 1]$ pour tout $\alpha > 0$.

La convergence absolue sur $]-1,1[$ découlant de l'application du critère du quotient ci-dessus, on peut conclure que la convergence est absolue sur $[-1,1]$ si $\alpha > 1$ et sur $]-1,1[$ si $\alpha \in ]0,1[$.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, la série définit une fonction $f$ sur $[-1,1]$.
Sur son intervalle de convergence, *i.e.* sur $]-1,1[$, on peut dériver terme à terme la série de puissances. On peut donc écrire successivement, pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big[x\, f(x)\Big] = \frac{d}{dx}\left[x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k+1}\right] &= \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{k+1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2) \frac{x^{2k+1}}{k+1} \\ &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned} \qquad (\heartsuit)$$

où on a tenu compte du résultat connu (série géométrique)

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k, \qquad |y| < 1$$

appliqué à $y = -x^2$. L'expression (♡) correspond au résultat attendu avec $\beta = 2$.
Par primitivation de cette expression, il vient

$$xf(x) = \ln(1+x^2) + C$$

Puisque $f(0) = 0$ (toutes les sommes partielles de la série étant nulles) et $\ln 1 = 0$, la constante d'intégration $C$ est nulle. Sur l'intervalle de convergence, on obtient donc

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \qquad \forall x \in ]-1,1[ \qquad (\diamondsuit)$$

Remarquons que cette égalité n'est valable en $x = 0$ qu'à condition de considérer le prolongement continu du membre de droite, *i.e.* d'interpréter cette expression en $x = 0$ comme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$$

L'égalité (♢) est valable sur tout le domaine de définition de $[-1,1]$ de la fonction $f$ définie par la série. En effet, toute série de puissances restant continue aux extrémités de son intervalle de convergence où elle converge, on a

$$f(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1} f(x) = \lim_{x \to \pm 1} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \pm \log 2 = \left.\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right|_{x=\pm 1}$$

**Question III**

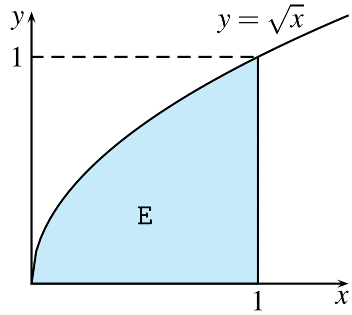
L'expression

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx\right] dy$$

peut être interprétée comme la réduction de

$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dxdy \qquad \text{où} \qquad \mathtt{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1,\ y^2 < x < 1\right\}$$

pour autant que $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \in \mathbb{L}_1(\mathtt{E})$.




Le domaine d'intégration $\mathtt{E}$ est esquissé ci-contre.

L'intégrand étant positif sur ce domaine, l'appartenance de $f$ à l'ensemble $\mathbb{L}_1(\mathtt{E})$ peut être démontrée en trouvant un ordre d'intégration partielle de la fonction qui a du sens.

Or, on calcule successivement

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathtt{E}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dydx \\
&= \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} dydx \\
&= \int_0^1 \cos x dx \\
&= \Big[\sin x\Big]_0^1 = \sin 1
\end{aligned}$$

où les intégrales successives existent puisqu'il s'agit à chaque fois d'intégrer une fonction continue sur un compact (pour presque tout $x \in ]0,1[$ dans le cas de la première intégrale partielle par rapport à $y$).

Question IV

i. La courbe $\mathcal{C}$ peut être avantageusement paramétrée en utilisant les coordonnées polaires sous la forme

$$\mathcal{C} : \mathbf{s}(\theta) = R\mathbf{e}_r(\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi[$$

Puisque

$$\mathbf{s}'(\theta) = R\mathbf{e}_\theta$$

la circulation recherchée peut être écrite sous la forme

$$I_{\mathcal{C}} = R\int_0^{2\pi} \mathbf{v}[\mathbf{s}(\theta)] \cdot \mathbf{e}_\theta \, d\theta$$

Sur $\mathcal{C}$, on a $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ et

$$\mathbf{v}[\mathbf{s}(\theta)] = \left[U_\infty - \Gamma\,\frac{\sin\theta}{R}\right]\mathbf{e}_x + \Gamma\,\frac{\cos\theta}{R}\mathbf{e}_y$$

Puisque

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y$$

il vient

$$\begin{aligned}
v[\mathbf{s}(\theta)] \cdot \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\left[U_\infty - \Gamma\,\frac{\sin\theta}{R}\right] + \Gamma\cos\theta\frac{\cos\theta}{R} \\
&= -U_\infty\sin\theta + \frac{\Gamma}{R}
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$I_{\mathcal{C}} = R\int_0^{2\pi}\left(-U_\infty\sin\theta + \frac{\Gamma}{R}\right)\,d\theta = 2\pi\Gamma$$

ii. Si la courbe $\mathcal{C}$ définit un compact régulier $\mathtt{K}$ qui ne contient pas l'origine, alors, puisque le champ vectoriel $\mathbf{v}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, la formule de Green permet de relier la circulation de $\mathbf{v}$ au rotationnel de $\mathbf{v}$ par

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathtt{K}} (\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_z\, dxdy$$

si $\mathcal{C}$ est parcourue 'aire à gauche'.
Or, en utilisant l'expression

$$\mathbf{v} = \left[U_\infty - \Gamma\frac{y}{x^2+y^2}\right]\mathbf{e}_x + \Gamma\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{e}_y$$

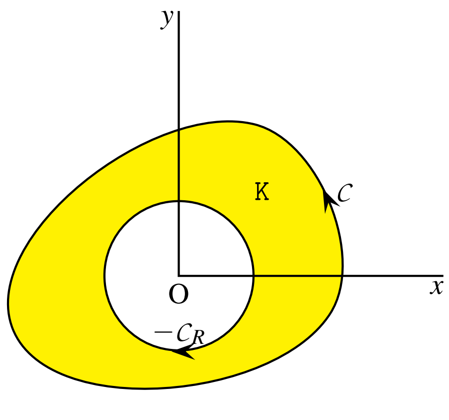
du champ de vitesse en coordonnées cartésiennes, on calcule aisément, si $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}(\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(U_\infty - \Gamma\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\ &= \Gamma\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \Gamma\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Dès lors, pour toute courbe $\mathcal{C}$ définissant un compact régulier $\mathtt{K}$ qui ne contient pas l'origine, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathtt{K}} (\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_z\, dxdy = 0$$

iii. Les résultats du point i. montrent que la circulation est identique sur tous les cercles centrés à l'origine, quel qu'en soit le rayon $R$.
Pour montrer que la circulation prend la même valeur $2\pi\Gamma$ sur toute courbe fermée entourant l'origine, considérons une telle courbe $\mathcal{C}$ et un cercle $\mathcal{C}_R$ de rayon $R$ tracé à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Appliquons la formule de Green au compact régulier $\mathtt{K}$ compris entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_R$.




Puisque $\mathbf{v}$ est continûment dérivable et irrotationnel sur $\mathtt{K}$, on a

$$\oint_{\partial K^+} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathtt{K}} (\nabla\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_z\, dxdy = 0$$

où la frontière $\partial K^+$ de $\mathtt{K}$ orientée 'aire à gauche' est constituée des courbes $\mathcal{C}$ et $-\mathcal{C}_R$. On a donc

$$\oint_{\partial K^+} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} + \oint_{-\mathcal{C}_R} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

soit

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = -\oint_{-\mathcal{C}_R} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}_R} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi\Gamma$$