Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2016

MATH0502-1 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : **3 heures**.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom, section et numéro d'ordre.

Question I

i. Énoncez le critère de Cauchy pour la convergence d'une série numérique.

ii. Énoncez des conditions suffisantes pour pouvoir dériver terme à terme une série de fonctions. Appliquez ces conditions au calcul de

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^3}\right]$$

iii. Si f est positive et intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$, peut-on en déduire que la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2} f(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathtt{I}$? Justifiez.

iv. Soit $f \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I})$ où $\mathtt{I} =]0,1[$. Peut-on affirmer que la fonction g définie par $g(x,y) = f(x)f(1-y)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathtt{I}^2 =]0,1[\times]0,1[$? Justifiez.
Si $g \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I}^2)$, exprimez son intégrale sur $\mathtt{I}^2$ en fonction de l'intégrale de f sur $\mathtt{I}$.

v. Quand dit-on d'un champ vectoriel $\mathbf{F}$ qu'il dérive d'un potentiel scalaire ? Énoncez (sans démonstration) des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ vectoriel dérive d'un potentiel scalaire.

Question II

i. En discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, étudiez la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^\alpha}$$

Précisez les valeurs de α pour lesquelles la convergence est absolue.

ii. En exploitant la relation

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

déterminez une représentation en série de puissances de x de la fonction arctg. Quel est l'intervalle de convergence de cette série ? Quel est le plus grand intervalle sur lequel cette représentation est valable ? Justifiez.

iii. Sur base des résultats précédents, montrez que

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{199}\right)+\varepsilon \qquad \text{où} \qquad |\varepsilon| < 0.02$$

Question III

La *trompette de Gabriel* est construite par la rotation de la courbe $y = L^{1+\alpha}/z^\alpha$ (où L et α sont des constantes strictement positives) autour de l'axe des z pour $z \in]L\,,+\infty[$. Elle est donc infiniment longue.

i. Calculez le volume de la trompette de Gabriel dans le cas où $\alpha = 1$.

ii. Déterminez l'expression intégrale de l'aire de la surface intérieure de la trompette en fonction de $\alpha > 0$.

iii. Montrez qu'il existe des valeurs de α pour lesquelles la trompette possède un volume fini mais une aire latérale infinie. On arrive ainsi au paradoxe selon lequel il est possible de remplir l'intérieur de la trompette avec un volume de peinture fini, mais il est impossible d'en peindre la surface latérale avec une quantité finie de peinture ! Déterminez toutes les valeurs de α qui conduisent à ce paradoxe.

SOLUTION

Question I

i. CRITÈRE DE CAUCHY : la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad u_k \in \mathbb{C}$$

est convergente si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq p \geq N) : \left| \sum_{k=p}^{q} u_k \right| \leq \varepsilon$$

ii. La dérivabilité terme à terme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ sur un intervalle $[a,b]$ est permise (au moins) si les conditions suivantes sont rencontrées :

$$\begin{cases} f_k \in C_1([a,b]) \\ \exists x_0 \in [a,b], \alpha \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = \alpha \\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} g \end{cases}$$

La série des fonctions $f_k(x) = \dfrac{\cos(kx)}{k^3}$ vérifie les hypothèses de ce théorème sur $\mathbb{R}$. On a

- $f_k \in C_1(\mathbb{R})$
- La série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente.
- La série des dérivées
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (Critère de Weierstrass), *i.e.*
$$\left| \frac{-\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$
où le membre de droite est le terme général d'une série de Riemann convergente.

On en conclut que les hypothèses sont vérifiées et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}\right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$

iii. On a

$$|g(x)| = \left| \mathrm{e}^{-x^2} f(x) \right| \leq |f(x)| = f(x) \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I}), \qquad \forall x \in \mathtt{I}$$

où on a tenu compte du fait que f est positive. Par le critère de Lebesgue, la fonction g étant mesurable (comme produit de deux fonctions mesurables) et majorée en module par une fonction intégrable sur $\mathtt{I}$, on en déduit que $g \in \mathbb{L}_1(\mathtt{I})$.

iv. En vertu du critère de Tonelli, g est intégrable sur $]0,1[\times]0,1[$ si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de $|g|$ qui a un sens. Pour appliquer le critère, on forme dès lors

$$\int_0^1 dy \int_0^1 |g(x,y)|dx = \int_0^1 dy \int_0^1 |f(1-y)|\,|f(x)|\,dx = \int_0^1 |f(1-y)|dy \int_0^1 \,|f(x)|\,dx$$

Puisque $f \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$, on sait que $|f| \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$, ce qui permet d'affirmer l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 |f(x)|dx$$

De même, si on introduit le changement de variable $u = 1-y$, on a

$$\int_0^1 |f(1-y)|dy = -\int_1^0 |f(u)|du = \int_0^1 |f(u)|du$$

et l'intégrale de $|f(1-y)|$ existe.

Par le critère de Tonelli, on en déduit que $g \in \mathbb{L}_1(]0,1[\times]0,1[)$.

Par le théorème de Fubini, appliquant le même changement de variable, il vient

$$\iint_{]0,1[\times]0,1[} g(x,y)dxdy = \left(\int_0^1 f(1-y)dy\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

v. On dit qu'un champ vectoriel $\mathbf{F}$ *dérive d'un potentiel scalaire* sur l'ouvert Ω lorsqu'il existe un champ scalaire ϕ dérivable sur Ω tel que

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \qquad \text{sur } \Omega$$

Le champ vectoriel $\mathbf{F} \in C_1(\Omega)$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ sur un ouvert Ω si et seulement si Ω est simplement connexe et $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sur Ω.

Alternativement, on peut affirmer que le champ vectoriel $\mathbf{F} \in C_1(\Omega)$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ sur un ouvert Ω si et seulement si

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

pour toute courbe régulière $\mathcal{C}$ contenue dans Ω ou si et seulement si l'intégrale curviligne

$$\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

sur toute courbe régulière $\mathcal{C}'$ contenue dans Ω ne dépend que des extrémités de $\mathcal{C}'$.

Question II

i. Le terme général de la série étant de signe variable, on étudie d'abord la convergence de la série des modules, *i.e.* la convergence absolue. Puisque le module du terme général est tel que

$$\frac{1}{(2k+1)^\alpha} \sim \frac{1}{(2k)^\alpha} = \frac{C}{k^\alpha}, \qquad (k \to \infty)$$

le critère en k^α permet de conclure que la série des modules converge si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, la série étudiée converge donc absolument.

Pour déterminer la convergence dans le cas où $\alpha \leq 1$, on remarque tout d'abord que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \end{cases},$$

La série diverge donc lorsque $\alpha \leq 0$ puisque son terme général ne tend alors pas vers 0.

Si $\alpha \in]0, 1]$, la série étudiée est semi-convergente en tant que série alternée. En effet, la suite

$$v_k = \frac{1}{(2k+1)^\alpha}$$

décroît monotonément vers 0 quel que soit $\alpha \in]0, 1]$.

En conclusion, la série est

- absolument convergente si $\alpha > 1$;
- semi-convergente si $\alpha \in]0, 1]$;
- divergente si $\alpha \leq 0$.

ii. Partant de l'expression de la somme de la série géométrique

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \qquad |q| \leq 1$$

on obtient, en posant $q = -x^2$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

La série converge pour toutes les valeurs de x telles que $-x^2 \in]-1, 1[$, c'est-à-dire pour tout $x \in]-1, 1[$.

Toute série de puissances peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence ; la série obtenue possède le même intervalle de convergence que la série de départ. Dès lors, pour tout $x \in]-1,1[$, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{d}{du} \operatorname{arctg} u \, du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} \, du \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u^{2k} \, du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x u^{2k} \, du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x \in]-1,1[\end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

En $x = \pm 1$, la série précédente s'écrit

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

qui est semi-convergente, comme établi au point i. pour $\alpha = 1$. En tant que série de puissances, la série ($\diamond$) reste continue aux extrémités de son intervalle de convergence où elle converge. Puisque la fonction arctg est elle-même continue en ces points, la série de puissances ci-dessus constitue également une représentation valable de la fonction arctg en ± 1.

En conclusion, on a

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

iii. L'expression

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{199}=\sum_{k=0}^{99}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

apparaissant dans l'énoncé constitue la somme partielle des 100 premiers termes du développement en série de puissances de $\operatorname{arctg} x$ établi ci-dessus particularisé à $x=1$. La série complète s'écrit

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Comme la série est alternée, l'erreur commise en approchant celle-ci par la somme partielle de ses 100 premiers termes est majorée par le premier terme négligé. En arrêtant la somme partielle en $k=99$, il vient

$$\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{99}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|\leq\left|\frac{(-1)^{100}}{2\cdot 100+1}\right|=\frac{1}{201}$$

soit

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{99}\frac{(-1)^k}{2k+1}+\varepsilon_0 \quad \text{où} \quad |\varepsilon_0|\leq\frac{1}{201}$$

et, comme annoncé,

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{199}\right)+\varepsilon \quad \text{où} \quad |\varepsilon|=|4\varepsilon_0|\leq\frac{4}{201}<0.02$$

Question III

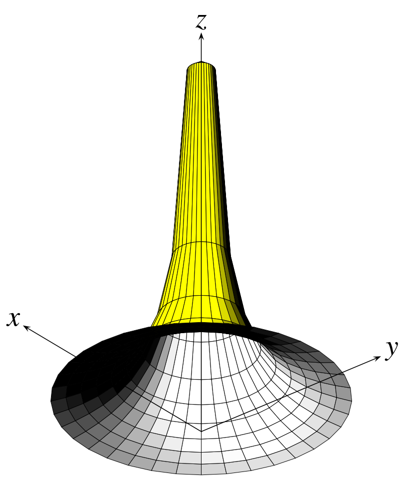
i. Le volume de la trompette s'exprime sous forme intégrale par

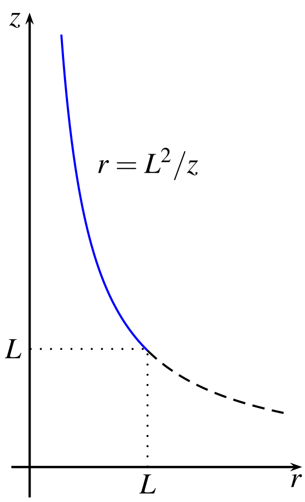
$$V=\iiint_E dx\,dy\,dz$$

où $E\subset\mathbb{R}^3$ désigne l'intérieur de la trompette.

Considérant la symétrie de révolution, il est préférable d'exprimer cette intégrale en coordonnées cylindriques. Le domaine d'intégration peut alors être décrit par

$$E'=\left\{(r,\theta,z): 0<r<\frac{L^2}{z},\ \theta\in]0,2\pi[,\ z\in]L,+\infty[\right\}$$





On a dès lors

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_L^{+\infty} dz \int_0^{L^2/z} r\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_L^{+\infty} \frac{L^4}{2z^2}\,dz = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-L^4}{2z}\right]_L^{+\infty} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{L^3}{2}\,d\theta = \pi L^3
\end{aligned}
$$

ii. En utilisant les coordonnées cylindriques, la surface latérale de la trompette peut être paramétrée par

$$
\mathbf{s}(\theta, z) = r(z)\,\mathbf{e}_r(\theta) + z\,\mathbf{e}_z = \frac{L^{1+\alpha}}{z^\alpha}\,\mathbf{e}_r(\theta) + z\,\mathbf{e}_z
$$

où

$$
\theta \in]0, 2\pi[\qquad \text{et} \qquad z \in]L, +\infty[
$$

L'aire latérale de la trompette est alors donnée par

$$
\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_L^{+\infty} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| dz
$$

On calcule aisément

$$
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \frac{L^{1+\alpha}}{z^\alpha}\mathbf{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = -\alpha \left(\frac{L}{z}\right)^{\alpha+1} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z
$$

Dès lors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} &= L^{\alpha+1} \left(\frac{1}{z^\alpha}\mathbf{e}_\theta \wedge \left[-\alpha \left(\frac{L}{z}\right)^{\alpha+1} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{z^\alpha}\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_z \right) \\
&= L^{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{z^\alpha} \left(\frac{L}{z}\right)^{\alpha+1} \mathbf{e}_z + \frac{1}{z^\alpha}\,\mathbf{e}_r \right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| = \frac{L^{\alpha+1}}{z^\alpha} \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{L}{z}\right)^{2\alpha+2} + 1}
$$

On a donc finalement

$$
\mathcal{A} = 2\pi \int_L^{+\infty} \frac{L^{\alpha+1}}{z^\alpha} \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{L}{z}\right)^{2\alpha+2} + 1}\ dz
$$

iii. • Dans l'expression intégrale de l'aire latérale de la trompette obtenue au point ii., l'intégrand est continu pour $z \in [L, +\infty[$ et vérifie

$$
\frac{L^{\alpha+1}}{z^\alpha} \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{L}{z}\right)^{2\alpha+2} + 1} \sim \frac{L^{\alpha+1}}{z^\alpha}, \quad (z \to +\infty)
$$

L'aire latérale de la trompette est donc finie si et seulement si $\alpha > 1$.

- Généralisant le raisonnement suivi au point i., on peut exprimer le volume engendré par la courbe $y = L^{\alpha+1}/z^{\alpha}$ sous la forme

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_L^{+\infty} dz \int_0^{L^{\alpha+1}/z^{\alpha}} r\,dr \\ &= \pi L^{2\alpha+2} \int_L^{+\infty} \frac{dz}{z^{2\alpha}} \end{aligned}$$

  Le volume est donc fini si et seulement si $2\alpha > 1$. Remarquons que le calcul effectué en i. dans le cas $\alpha = 1$ a bien conduit à un volume fini.

En conclusion, la trompette aura un volume fini et une aire latérale infinie pour

$$\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$$