Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0013-1 - ALGÈBRE
REMÉDIATION 5

Diagonalisation et formes quadratiques

Il est utile de revoir les **paragraphes 4.7 à 4.9 du chapitre 4** du cours d'Algèbre avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Soient A et B deux matrices symétriques. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives et si toutes les valeurs propres de B sont positives ou nulles, alors $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

ii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
La seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité elle-même.

iii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si tous les mineurs diagonaux principaux de la matrice symétrique A sont strictement négatifs, alors A est définie négative.

iv. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si la matrice A est diagonalisable, alors il en est de même de la matrice $\mathsf{A}+\beta\mathbb{I}$ quelle que soit la constante β.

v. On considère un matériau magnétique qui, lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$, présente un moment dipolaire magnétique par unité de volume $\mathbf{M}$ (plus simplement appelé 'vecteur aimantation') décrit par la loi $\mathbf{M}=\mathcal{A}(\mathbf{H})$ où $\mathcal{A}$ désigne une application linéaire. Dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, les composantes de $\mathcal{A}$ sont données par une matrice de la forme

$$\mathsf{A}=\chi_0\begin{pmatrix} 11 & \alpha & 2\alpha \\ \alpha & 11 & -2 \\ 2\alpha & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

où $\chi_0>0$ et α sont des constantes réelles.

(a) Déterminez les valeurs de α telles que l'application d'un champ magnétique quelconque s'accompagne de la création d'une aimantation renforçant le champ magnétique initial (comportement paramagnétique), *i.e.* telles que $\mathbf{H}\cdot\mathbf{M}>0$ quel que soit $\mathbf{H}\neq\mathbf{0}$.

(b) Dans le cas où $\alpha=1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, toutes les directions de l'espace telles que l'application d'un champ magnétique $\mathbf{H}$ selon une telle direction s'accompagne de la création d'une aimantation $\mathbf{M}$ parallèle à $\mathbf{H}$.

(c) Dans le cas où $\alpha=1$, déterminez une matrice orthogonale S décrivant le passage de la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ à une base orthonormée $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ dans laquelle $\mathcal{A}$ est représentée par une matrice diagonale D. Que vaut D ?

vi. Soit la matrice

$$\mathsf{A}=\sigma_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(où $\sigma_0>0$ est un paramètre connu) représentant dans une base particulière l'application linéaire $\mathcal{A}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J}=\mathcal{A}(\mathbf{E})$.

(a) Déterminez la condition sur le paramètre α pour que, conformément au second principe de la thermodynamique, la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.

(b) Dans le cas où $\alpha = 4$, déterminez les composantes du champ électrique $\mathbf{E}$ d'intensité $E_0 = ||\mathbf{E}|| > 0$ fixée qui engendre la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ maximale.

Remédiation 5 d'Algèbre - Réponses succinctes aux questions posées.

i. VRAI

ii. VRAI

iii. FAUX

iv. VRAI

v. (a) $\alpha \in]-\sqrt{77/5}, \sqrt{77/5}[$

(b) Directions des vecteurs propres de A.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

et directions $\mathbf{E}$ dans le plan défini par

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

(c)

$$\mathsf{S} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{diag}(6\chi_O, 12\chi_O, 12\chi_O)$$

vi. (a) $\alpha > 4$

(b)

$$\mathsf{E} = \pm \frac{E_0}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$