Prof. Éric J.M.DELHEZ

Valeurs et vecteurs propres

Il est utile de revoir les **paragraphes 4.1 à 4.6 du chapitre 4** du cours d'Algèbre avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si A $(n \times n)$ admet la seule valeur propre λ de multiplicité n, alors A est un multiple de la matrice identité.

ii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Les valeurs propres de la matrice $\mathsf{C} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ peuvent être formées en prenant la somme de valeurs propres des matrices A et B.

iii. Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les valeurs et les vecteurs propres sont connus. On suppose que cette matrice A ne possède pas de valeur propre égale à 1. Déterminez les valeurs et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

iv. En discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre réel $\beta \geq 0$, calculez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & \beta^2 & 2 \end{pmatrix}$$

Justifiez en détaillant vos calculs.

v. On considère un solide dont le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_C$ est décrit, dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, par la matrice

$$\mathsf{J}_\mathsf{C} = J_0 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

où J_0 est un paramètre réel strictement positif. Ce tenseur central d'inertie caractérise la distribution de la masse autour du centre d'inertie.
La rotation du solide autour de son centre d'inertie est décrite par le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ dont l'orientation indique la direction de l'axe autour duquel s'effectue la rotation et dont le module donne la vitesse angulaire correspondante. On note w la matrice colonne des composantes de $\boldsymbol{\omega}$ dans la base choisie.
On appelle moment cinétique par rapport à C, le vecteur $\mathbf{H}_C$ dont la matrice colonne des composantes dans la base orthonormée choisie est donnée par

$$\mathsf{H}_\mathsf{C} = \mathsf{J}_\mathsf{C}\mathsf{w}$$

(a) Sans effectuer aucun calcul, justifiez l'existence de trois directions de rotation du solide, mutuellement orthogonales, pour lesquelles les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{H}_C$ sont parallèles.

(b) Déterminez en fonction de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ les directions de rotation du solide pour lesquelles le moment cinétique $\mathbf{H}_C$ est parallèle au vecteur $\boldsymbol{\omega}$.

Remédiation 4 d'Algèbre - Réponses succinctes aux questions posées.

i. FAUX

ii. FAUX

iii. Valeurs propres : les n valeurs propres de A et la valeur propre 1 de multiplicité n.

Vecteurs propres relatifs aux valeurs propres λ_i de A : n vecteurs linéairement indépendants

$$\begin{pmatrix} \mathsf{x}_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \mathsf{x}_i \text{ est un vecteur propre relatif à } \lambda_i$$

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1$: n vecteurs linéairement indépendants choisis parmi

$$\begin{pmatrix} -(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n)^{-1}\mathsf{A}\mathsf{y} \\ \mathsf{y} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathsf{y} \in \mathbb{R}^n$$

iv. Valeurs propres :
Si $\beta \neq 0$: 2, $2 - 3\beta$ et $2 + 3\beta$
Si $\beta = 0$: 2 de multiplicité 3

Vecteurs propres :
Si $\beta \neq 0$:
Pour $\lambda = 2$:

$$\mathsf{w}_1 = \delta_1 \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta_1 \neq 0$$

Pour $\lambda = 2 - 3\beta$:

$$\mathsf{w}_2 = \delta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3/\beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta_2 \neq 0$$

Pour $\lambda = 2 + 3\beta$:

$$\mathsf{w}_3 = \delta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3/\beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta_3 \neq 0$$

Si $\beta = 0$:

$$\mathsf{w} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$$

v. (a) -
(b)

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}}$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{E}_3 = \frac{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}}$$