## Applications et systèmes linéaires

Il est utile de revoir le **chapitre 3** du cours d'Algèbre avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ de dimension supérieure à 3 et si $\rho(\mathcal{A}) = 3$, alors les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$ et $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3)$ forment une base de $\mathrm{im}\mathcal{A}$.

ii. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire de $\mathtt{E} \to \mathtt{F}$. Montrez que

$$\dim(\mathtt{E}) - \dim\left[\ker(\mathcal{A})\right] = \dim(\mathtt{F}) - \dim\left[\ker(\mathcal{A}^*)\right]$$

iii. Résolvez le système ci-dessous dans $\mathbb{R}$ en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x + 2\lambda y + 4z = 1 \\ x + \lambda y + 2(\lambda - 1)z = 2 \end{cases}$$

iv. On considère l'advection et la diffusion d'un constituant dissous dans l'eau d'une rivière représentée par un modèle unidimensionnel. En supposant qu'un régime stationnaire est atteint, la concentration $C$ est alors une fonction de la seule coordonnée $x$ mesurée au fil de l'eau et est décrite par l'équation

$$u\frac{dC}{dx} = \kappa\frac{d^2C}{dx^2}$$

où $u$ désigne la vitesse de l'écoulement et $\kappa$ désigne le coefficient de diffusion turbulente.
Les conditions aux limites amont et aval sont décrites respectivement par les relations

$$uC - \kappa\frac{dC}{dx} = J \qquad \text{en} \quad x = 0$$

et

$$\kappa\frac{dC}{dx} = 0 \qquad \text{en} \quad x = \ell$$

où $u$, $\kappa$, $J$ et $\ell$ sont des constantes strictement positives.
Les six grandeurs physiques ($u$, $x$, $\ell$, $C$, $\kappa$, et $J$) pertinentes pour le problème étudié sont des combinaisons particulières de 3 grandeurs fondamentales que sont la longueur $L$, le temps $T$ et la masse $M$. Ainsi, une vitesse comme $u$ peut être interprétée comme le rapport d'une longueur et d'un temps, ce qui se note $[u] = LT^{-1}$. On dit que $LT^{-1}$ représente les *dimensions* de $u$. De même,

$$[x] = L, \qquad [\ell] = L, \qquad [C] = ML^{-3}, \qquad [\kappa] = L^2T^{-1} \qquad \text{et} \qquad [J] = ML^{-2}T^{-1}$$

Les dimensions d'un produit sont le produit des dimensions, *i.e.*

$$\begin{cases} [X] = M^{\alpha_1}L^{\beta_1}T^{\gamma_1} \\ [Y] = M^{\alpha_2}L^{\beta_2}T^{\gamma_2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad [XY] = M^{\alpha_1+\alpha_2}L^{\beta_1+\beta_2}T^{\gamma_1+\gamma_2}$$

(a) Déterminez toutes les valeurs de $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ et $w$ permettant de construire des produits de la forme $\Pi = u^p x^q \ell^r C^s \kappa^t J^w$ tels que

$$[\Pi] = [u^p x^q \ell^r C^s \kappa^t J^w] = 1 = M^0 L^0 T^0$$

De tels nombres $\Pi$ sont dits adimensionnels.

(b) Montrez que tous les nombres adimensionnels $\Pi$ peuvent être exprimés comme des produits de puissances de trois nombres adimensionnels $\Pi_1$,$\Pi_2$ et $\Pi_3$.

Pour que les résultats des essais effectués en laboratoire sur des modèles réduits puissent être utilisés en vraie grandeur, il faut que chacun de ces nombres adimensionnels prenne la même valeur dans la réalité et dans le test effectué. C'est le principe de la théorie de la similitude.

**Remédiation 3 d'Algèbre - Réponses succinctes aux questions posées.**

i. FAUX

ii. -

iii. Si $\lambda \neq 0$ et si $\lambda \neq 2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2-\lambda} \\ \\ \dfrac{1-2\lambda}{\lambda(2-\lambda)} \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ \\ -\dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda = 2$, le système est incompatible.

iv. (a)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$$

(b) -