LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0013-1 - ALGÈBRE
REMÉDIATION 2

Espaces vectoriels, vecteurs physiques et orthonormation

Il est utile de revoir le **chapitre 2** du cours d'Algèbre avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$ sont linéairement indépendants, alors, il en est de même des vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

ii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si $\mathtt{E}$ désigne un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\mathtt{F}$, alors les vecteurs de $\mathtt{F}$ qui n'appartiennent pas à $\mathtt{E}$ constituent un sous-espace vectoriel de $\mathtt{F}$.

iii. Soit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ des vecteurs linéairement indépendants fixés d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$. L'ensemble $\mathtt{F}$ défini par

$$\mathtt{F} = \{\mathbf{x} \in \mathtt{E} \ : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathbb{C}\}$$

constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ si on le munit des opérations d'addition et de multiplication par un nombre complexe définies sur $\mathtt{E}$?

iv. Simplifiez l'expression

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

v. Déterminez la condition sur le vecteur $\mathbf{a}$ pour que n'importe quel vecteur $\mathbf{s}$ puisse s'écrire

$$\mathbf{s} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a})$$

vi. On considère un triangle quelconque de côtés a, b et c et d'angles opposés à ces côtés α, β, γ. Démontrez en utilisant l'algèbre vectorielle le théorème de Pythagore généralisé

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

vii. Dans $\mathbb{C}^3$, on considère les vecteurs

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

appartenant au noyau d'une application $\mathcal{A}$ de rang 1.

(a) Montrez que les vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont linéairement indépendants.

(b) Déterminez une base orthonormée de $\ker \mathcal{A}$.

(c) Déterminez une base orthonormée de $(\ker \mathcal{A})^\perp$.

Remédiation 2 d'Algèbre - Réponses succinctes aux questions posées.

i. VRAI

ii. FAUX

iii. Non

iv. $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$

v. $\mathbf{a}$ doit être unitaire.

vi. -

vii. (a) -

(b)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}i\\ 2\\ i\end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$