Prof. Éric J.M.DELHEZ

Calcul matriciel

Il est utile de revoir le **chapitre 1** du cours d'Algèbre avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si x et y désignent des matrices colonnes de n éléments réels, alors

$$\text{trace}\,(\mathsf{x}\mathsf{y}^{\mathrm{T}}) = \text{trace}\,(\mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{y})$$

ii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si A et B sont deux matrices symétriques d'ordre n, alors AB est une matrice symétrique d'ordre n

iii. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si elle existe, l'inverse d'une matrice normale est également normale.

iv. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si A est une matrice orthogonale d'ordre n et si C est la matrice des cofacteurs correspondante, alors

$$\text{dtm}^2\mathsf{C} = 1$$

v. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
Si A et B sont anti-hermitiennes, alors il en est de même de

$$i(\mathsf{AB} - \mathsf{BA})$$

vi. Calculez

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 2 & 1 & 1-i \end{pmatrix}^*$$

vii. Déterminez une forme normale échelonnée de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

viii. Déterminez l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ix. On considère la matrice

$$\mathsf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & & & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & & & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez le déterminant de A_n.

(b) Déterminez l'inverse de A_n (si elle existe).

x. On considère une matrice A réelle, carrée, d'ordre n et non singulière ainsi que des matrices-colonnes non nulles c et d appartenant à $\mathbb{R}^n$.

(a) Déterminez les dimensions de $\mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}$ et de $\mathsf{d}^\mathrm{T}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$.

(b) Déterminez le rang de $\mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}$.

(c) Déterminez la valeur du scalaire α telle que, dans le cas où $1+\mathsf{d}^\mathrm{T}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c} \neq 0$, l'inverse de la matrice $\mathsf{B} = \mathsf{A} + \mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}$ existe et peut être obtenue à partir de l'inverse de A selon

$$\left(\mathsf{A} + \mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}\right)^{-1} = \mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}\mathsf{A}^{-1}$$

xi. On considère l'ensemble $\mathtt{E}$ des matrices A de la forme

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{R} & \mathsf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où R est une matrice orthogonale d'ordre 3 quelconque et où a est une matrice colonne quelconque de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrez qu'il existe un sous-ensemble $\mathtt{E}'$ de $\mathtt{E}$ dont toutes les matrices sont normales. Déterminez les conditions éventuelles sur R et sur a vérifiées par les éléments de $\mathtt{E}'$.

(b) Montrez que l'ensemble $\mathtt{E}$ muni de la loi de multiplication matricielle habituelle forme un groupe, c'est-à-dire que

- $\mathbb{I} \in \mathtt{E}$,
- $\forall \mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathtt{E}$, $\mathsf{AB} \in \mathtt{E}$,
- $\forall \mathsf{A} \in \mathtt{E}$, $\exists \mathsf{X} \in \mathtt{E}$ tel que $\mathsf{XA} = \mathsf{AX} = \mathbb{I}$.

Remédiation 1 d'Algèbre - Réponses succinctes aux questions posées.

i. VRAI

ii. FAUX

iii. VRAI

iv. VRAI

v. FAUX

vi.
$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 \\ -2+2i & 1+i \end{pmatrix}$$

vii.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

viii.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$

ix. (a) Si n ou $n-1$ est multiple de 4, $\operatorname{dtm} \mathsf{A}_n = n!$ et, dans les autres cas, $\operatorname{dtm} \mathsf{A}_n = -n!$

(b)
$$\mathsf{A}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/n \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n-1) & 0 \\ \vdots & & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/2 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x. (a) $n \times n$ et 1×1

(b) $\rho(\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}) = 1$

(c) $\alpha = -1/(1 + \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c})$

xi. (a) $\mathsf{a} = 0$

(b) -