LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2022

MATH0013 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

NOM : .... PRÉNOM : ....

MATRICULE : ....

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

- ***Indiquez lisiblement votre nom, votre prénom et votre matricule aux emplacements prévus.***
- ***Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez à la fin du questionnaire. À l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.***
- ***Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour le 12 octobre à 10h00.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

i. Calculez A^2 en simplifiant votre réponse au maximum.

ii. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathsf{A}^n = \begin{pmatrix} e^{in\pi/4} & \sqrt{2}\sin\dfrac{n\pi}{4} \\ 0 & e^{-in\pi/4} \end{pmatrix}$$

Question II

i. Si A est une matrice anti-symétrique d'ordre 3, montrez que

$$\det(2\mathsf{A}+\mathsf{A}^{\mathsf{T}})=0$$

ii. On considère la matrice A de dimensions $m\times n$ où $m>n$ et la matrice

$$\mathsf{B}=\begin{pmatrix}\mathsf{A}\\ \mathsf{0}\end{pmatrix}$$

où $\mathsf{0}$ est la matrice nulle de dimensions $1\times n$. Quelles sont les dimensions de A_g^{-1} ?
Montrez que si A possède une inverse à gauche A_g^{-1} alors B possède également une inverse à gauche B_g^{-1}. Quelles sont les dimensions de B_g^{-1} ? Celle-ci est-elle unique ? Justifiez.

iii. Le produit de matrices unitaires est-il unitaire ? Justifiez.

iv. Soit A et B carrées d'ordre n avec

$$a_{ij}=2^{i-j}-n\,\delta_{ij}\quad\text{et}\quad b_{ij}=2^{i+j}\qquad\text{pour}\quad i,j\in\{1,\,2\ldots n\}$$

où

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

Calculez $(\mathsf{AB})_{ij}$.

Question III

En discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs prises par le paramètre $\beta\in\mathbb{R}$, déterminez le rang de

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & 5\\ -1 & 4 & 2 & -7\\ 3 & -1 & \beta & 10\end{pmatrix}$$

et identifiez les relations linéaires éventuelles entre les colonnes de A.

SOLUTION TYPE

Question I

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

i. On calcule

Expression correcte de A^2 : 1 pt

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}\mathsf{A} &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/4}\,e^{i\pi/4} & e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4} \\ 0 & e^{-i\pi/4}\,e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & 2\cos(\pi/4) \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} \\ 0 & -i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matrice simplifiée au maximum : 1 pt

Total i. : 2 pts

ii. Démontrons par récurrence/induction que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

Principe de démonstration correct : 1 pt

$$\mathsf{A}^n = \begin{pmatrix} e^{in\pi/4} & \sqrt{2}\sin(n\pi/4) \\ 0 & e^{-in\pi/4} \end{pmatrix}$$

- CAS DE BASE : La proposition est vraie pour $n = 1$ puisque

  Énoncé du cas de base $n = 1$: 1 pt
  Démonstration du cas de base : 1 pt

$$\mathsf{A}^1 = \mathsf{A} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & \sqrt{2}\sin(\pi/4) \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

- CAS INDUCTIF : Montrons que, si la proposition est vraie pour n (= hypothèse inductive), elle est également vraie pour $n+1$.
  Sous l'hypothèse inductive, on a

  Énoncé du cas inductif : 1 pt

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{n+1} = \mathsf{A}^n\mathsf{A} &= \begin{pmatrix} e^{in\pi/4} & \sqrt{2}\sin(n\pi/4) \\ 0 & e^{-in\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 1 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(n+1)\pi/4} & e^{in\pi/4}+\sqrt{2}\sin(n\pi/4)\,e^{-i\pi/4} \\ 0 & e^{-i(n+1)\pi/4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forme du produit sous l'hypothèse inductive : 1 pt

où

Démonstration de la forme de $(\mathsf{A}^{n+1})_{12}$: 2 pts

$$\begin{aligned}(\mathsf{A}^{n+1})_{12} &= e^{in\pi/4}+\sqrt{2}\sin(n\pi/4)\,e^{-i\pi/4} \\ &= \cos(n\pi/4)+i\sin(n\pi/4)+\sqrt{2}\sin(n\pi/4)\Big(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4)\Big) \\ &= \cos(n\pi/4)+i\sin(n\pi/4)+\sqrt{2}\sin(n\pi/4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \cos(n\pi/4)+\sin(n\pi/4)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on calcule aisément

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} &= \sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\Big(\sin(n\pi/4)\cos(\pi/4)+\cos(n\pi/4)\sin(\pi/4)\Big) \\ &= \cos(n\pi/4)+\sin(n\pi/4) = (\mathsf{A}^{n+1})_{12}\end{aligned}$$

Dès lors, la proposition est vraie pour $n+1$ puisque

$$\mathsf{A}^{n+1} = \begin{pmatrix} e^{i(n+1)\pi/4} & \sqrt{2}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4} \\ 0 & e^{-i(n+1)\pi/4} \end{pmatrix}$$

- CONCLUSION : Par induction, on en déduit que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Conclusion correctement énoncée : 1 pt

Total ii. : 8 pts

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. A étant anti-symétrique, elle vérifie $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$ de sorte que

$$\det(2\mathsf{A}+\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(-2\mathsf{A}^{\mathrm{T}}+\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(-\mathsf{A}^{\mathrm{T}})$$

Connaissance du concept de matrice anti-symétrique : 1 pt

Puisque A est d'ordre 3, on peut ensuite écrire

$$\det(-\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = (-1)^3\det(\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = -\det(\mathsf{A})$$

Utilisation de $\det\lambda\mathsf{A} = \lambda^n\det\mathsf{A}$ *: 1 pt*

$\det\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \det\mathsf{A}$ *: 1 pt*

Par ailleurs, A étant anti-symétrique,

$$\det(-\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathsf{A})$$

$\det\mathsf{A} = 0$ *: 1 pt*

(Justif. de $\det\mathsf{A} = 0$ *par* A *anti-symétrique d'ordre impair OK)*

Finalement,

$$-\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A}) = 0$$

Total i. : 4 pts

ii. Si la matrice A de dimensions $m\times n$ possède une inverse à gauche A_g^{-1}, celle-ci est de dimensions $n\times m$ et vérifie

$$\mathsf{A}_g^{-1}\mathsf{A} = \mathbb{I}_n$$

Dimensions de A_g^{-1} *: 1 pt*

Soit la matrice B de dimensions $(m+1)\times n$ obtenue en ajoutant une ligne de zéros sous la matrice A. Si elle possède une inverse à gauche B_g^{-1}, celle-ci doit être de dimensions $n\times(m+1)$.

Dimensions de B_g^{-1} *: 1 pt*

Recherchons une inverse à gauche de B de la forme

$$\mathsf{B}_g^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_g^{-1} & \mathsf{x} \end{pmatrix}$$

Expression générale de la matrice inverse recherchée : 1 pt

où x est une matrice colonne de n éléments. Par définition de l'inverse à gauche, on doit avoir

$$\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B} = \mathbb{I}_n$$

Or, quelle que soit x, on a

$$\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_g^{-1} & \mathsf{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathsf{A}_g^{-1}\mathsf{A} + \mathsf{x}0 = \mathbb{I}_n$$

Preuve/calcul de $\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B} = \mathbb{I}_n$ *: 1 pt*

La matrice B possède donc une infinité d'inverses à gauche puisque toutes les matrices obtenues en ajoutant une colonne quelconque à droite de la matrice A_g^{-1} conviennent (indépendamment du fait que A_g^{-1} pourrait ne pas être unique).

Non-unicité de l'inverse : 1 pt

Total ii. : 5 pts

iii. Les matrices A et B étant unitaires, elles vérifient $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^*$ et $\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^*$ de sorte que

$$(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^* = (\mathsf{AB})^*$$

Concept de matrice unitaire : 1 pt

Ceci démontre que le produit de deux matrices unitaires est bien également unitaire.

Démonstration : 2 pts

Total iii. : 3 pts

iv. Utilisant la formule du produit matriciel, on calcule successivement

$$\begin{aligned}(\mathsf{AB})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (2^{i-k} - n\delta_{ik})\,2^{k+j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{i-k}2^{k+j} - n\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}2^{k+j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{i+j} - n2^{i+j} \\ &= n2^{i+j} - n2^{i+j} = 0\end{aligned}$$

Connaissance de l'expression générale du produit matriciel avec indices corrects : 1 pt

Particularisation aux matrices A et B considérées : 1 pt

On a en effet

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{i+j} = n2^{i+j}$$

Simplification du premier terme : 1 pt

puisque 2^{i+j} est indépendant de l'indice sommatoire k (somme de n termes identiques) et

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}2^{k+j} = 2^{i+j}$$

Simplification du terme avec le symbole de Kronecker : 1 pt

puisque la seule valeur de k donnant un terme non nul dans cette somme est $k = i$ pour laquelle $\delta_{ii} = 1$.

Total iv. : 4 pts

TOTAL QI : 16 PTS

Question III

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 3 pts

Attention : il faut montrer dans le cas $\beta = 5$ que tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls pour mériter les points du principe.

Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & \beta & 10 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée sans modifier son rang.

Commençons par échanger la première et la deuxième ligne, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & \beta & 10 \end{pmatrix}$$

puis par multiplier la première ligne par -1,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & \beta & 10 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement,

$$\begin{array}{l}\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_1\end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 11 & \beta+6 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2/9 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & \beta+6 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\ell_1 \to \ell_1 + 4\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 11\ell_2\end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta-5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

La présence de signes d'égalité entre les matrices successives donne lieu à une pénalité de 2 pts pour l'exercice.

- Si $\beta \neq 5$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par $\beta - 5$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{l}\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3\end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme normale échelonnée obtenue indique que le rang de A est égal à 3 dans ce cas.

Rang si $\beta \neq 5$: 3 pts

Les opérations élémentaires effectuées ci-dessus portant exclusivement sur les lignes de la matrice, elles ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. Il y a dans ce cas une relation linéaire entre les colonnes qui peut s'écrire

Méthode/principe approprié : 1 pt
Relation linéaire : 1 pt

$$\mathsf{c}_4 = 3\mathsf{c}_1 - \mathsf{c}_2$$

- Si $\beta = 5$, la matrice ($\dagger$) est sous le forme normale échelonnée

Rang si $\beta = 5$: 3 pts

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 2 dans ce cas et deux relations linéaires indépendantes entre les colonnes peuvent s'écrire sous la forme

Nombre de relations linéaires exact : 1 pt
Relations linéaires : 2 pts

$$\mathsf{c}_3 = 2\mathsf{c}_1 + \mathsf{c}_2$$

et

$$\mathsf{c}_4 = 3\mathsf{c}_1 - \mathsf{c}_2$$

TOTAL QIII : 14 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- La multiplication matricielle s'effectue ligne par colonne comme l'indique la formule
$$(\mathsf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
L'élément ij du produit est donc obtenu en faisant la somme des produits des éléments correspondants de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- Pour élever une matrice au carré, il faut la multiplier par elle-même, pas élever au carré chacun des éléments de la matrice.
- Il était demandé de simplifier au maximum la réponse obtenue. Les exponentielles imaginaires devaient donc être évaluées en utilisant
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
pour chacune des valeurs de theta (0, $\pm\pi/2$, $\pm\pi$,...) pour lesquelles ceci conduit à clarifier le résultat.

ii. Une démonstration par induction (ou récurrence) s'imposait pour répondre à cette question. Une telle démonstration comporte 3 étapes indispensables.

Premièrement, le cas de base doit être démontré. Il correspond à la plus petite valeur du paramètre n pour laquelle la propriété doit être démontrée, soit $n = 1$ dans cet exercice puisque $n \in \mathbb{N}_0$. Il est inutile de démontrer plusieurs cas de base. Il ne faut pas non plus considérer $n = 2$ comme cas de base puisqu'on doit démontrer la propriété pour $n \in \mathbb{N}_0 = \{1,\, 2,\, 3, \ldots\}$.

Le cas inductif doit ensuite être démontré. Il s'agit de montrer que si la propriété est vraie pour n, elle est également vraie pour $n+1$. L'hypothèse inductive (propriété vraie pour n) est utilisée dans la démonstration du cas $n+1$.

La troisième partie de la démonstration est constituée de la conclusion. Elle consiste ici à énoncer que, par le principe d'induction, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Question II

i.
- Il y avait deux façons correctes d'aborder cette démonstration. Soit, comme dans la solution-type, en utilisant les propriétés de la matrice A sans exprimer ses éléments, soit en considérant une matrice de la forme
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$
Rappelons que les éléments diagonaux d'une matrice anti-symétrique sont forcément nuls puisqu'ils vérifient $a_{ii} = -a_{ii}$.
- Pour démontrer qu'une expression est nulle, il est souvent possible de la simplifier en utilisant les hypothèses données et les règles d'algèbre. On sera attentif à traduire correctement les hypothèses en langage mathématique, à ne pas inventer de règles fausses et à appliquer correctement les règles connues. En particulier, on se rappellera les éléments suivants.

- ◇ Le déterminant d'une somme de matrices n'est pas égal à la somme des déterminants de ces matrices.
- ◇ Le déterminant d'une matrice non diagonale n'est en général pas égal au produit des éléments de sa diagonale principale.
- ◇ Une matrice anti-symétrique d'ordre impair est singulière. Il n'y a pas de résultat équivalent pour une matrice anti-symétrique d'ordre pair.
- ◇ La propriété $\det(-\mathsf{A}) = (-1)^n \det \mathsf{A}$ donne $\det(-\mathsf{A}) = -\det \mathsf{A}$ si n est impair mais $\det(-\mathsf{A}) = \det \mathsf{A}$ si n est pair.

ii.
- Seules les matrices carrées non singulières comportant exclusivement des blocs carrés alignés sur la diagonale principale peuvent être inversées en inversant ces blocs. Ce n'était pas le cas de la matrice B de cet énoncé.
- Une matrice rectangulaire comportant plus de lignes que de colonnes (matrice verticale), comme la matrice B de cet énoncé, peut posséder une inverse à gauche. Elle ne possédera jamais d'inverse à droite. Afin de prouver l'existence d'une inverse à gauche, il suffit de donner l'expression d'une matrice qui vérifie la définition. Le produit de cette inverse et de la matrice B devant donner la matrice identité, on cherche, en décomposant les matrices en blocs, une matrice X et une matrice colonne x telles que

$$\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{X} & \mathsf{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathsf{XA} + \mathsf{x}0 = \mathsf{XA} = \mathbb{I}_n$$

Il suffit donc de choisir $\mathsf{X} = \mathsf{A}_g^{-1}$ et n'importe quelle matrice colonne x puisque cette dernière n'influence pas le résultat du produit. L'inverse recherchée existe donc et n'est pas unique.

iii.
- Pour démontrer une égalité, il est souvent possible de développer un des membres de cette égalité afin d'obtenir l'autre. Pour ce faire, on utilise les hypothèses données et les règles connues d'algèbre. On sera attentif à traduire correctement les hypothèses en langage mathématique, à ne pas inventer de règles fausses et à appliquer correctement les règles connues. En particulier, on se rappellera les éléments suivants.
  - ◇ Une matrice **unitaire** est une matrice dont l'inverse est égale à l'adjointe. Elle ne doit pas être confondue avec la matrice **identité**.
  - ◇ L'inverse d'un produit de matrices est égale au produit des inverses de ces matrices dans l'ordre inverse. Il en va de même pour l'adjointe du produit qui est égale au produit des adjointes dans l'ordre inverse.
  - ◇ Si $\det \mathsf{M} = 1$, cela ne veut pas forcément dire que la matrice est unitaire. Par contre, si M est unitaire, on a $|\det \mathsf{M}| = 1$.

iv.
- Il fallait évidemment commencer par écrire la formule du produit matriciel afin d'exprimer les éléments du produit AB. Il était ensuite nécessaire de particulariser cette formule aux matrices de l'énoncé, en indiquant les bons indices. En particulier, c'est a_{ik} qui intervient dans la formule et qui s'exprime donc comme $a_{ik} = 2^{i-k} - n\delta_{ik}$.
- Une expression de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha$$

où α ne dépend pas de l'indice sommatoire k décrit la somme de n termes identiques égaux à α. La valeur de la somme est donc $n\alpha$.

- Le symbole de Kronecker δ_{ki} ne diffère de zéro que si ses deux indices sont identiques. Le seul terme non nul de la somme portant sur ce symbole est donc celui pour lequel l'indice sommatoire $k = i$. Plus généralement, pour toute fonction f, on a
$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\delta_{ki} = f(i)$$

Question III

- Il convient de lire attentivement chaque énoncé pour identifier toutes les sous-questions que celui-ci peut contenir. Lorsqu'on a terminé la rédaction de sa réponse, il est prudent de relire l'énoncé pour vérifier qu'aucun élément n'a été oublié dans cette réponse.

  Dans cette question, il ne fallait pas se contenter de déterminer le rang de la matrice ou de dénombrer les relations linéaires entre les colonnes. Il fallait aussi expliciter ces relations linéaires, ce que beaucoup ont oublié.
- La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées et en procédant avec ordre et méthode. Puisqu'il est aussi demandé d'identifier les relations linéaires entre les colonnes de la matrice, il faut privilégier les opérations sur les lignes par rapport à la manipulation des colonnes. Si des opérations élémentaires sont effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Si, par contre, des opérations élémentaires sont effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées.
- Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.
- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$
  ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.

- Les matrices successives obtenues suite aux opérations élémentaires effectuées ne sont pas égales entre elles, même si certaines propriétés (comme le rang) de ces matrices sont conservées.
- La discussion en fonction d'un paramètre est nécessaire quand une opération n'est pas licite pour certaines valeurs de ce paramètre. Il ne faut pas introduire des valeurs caractéristiques arbitraires comme $\beta = 0$ ou $\beta = 1$ qui ne sont justifiées que par l'habitude et pas par les impératifs du calcul.

  Dans cet exercice, la division de la troisième ligne par $\beta - 5$ conduit à étudier séparément les cas $\beta = 5$ et $\beta \neq 5$. Aucune autre opération ne justifie de distinguer d'autres cas.
- Le nombre de relations linéaires entre les colonnes de la matrice est égal au nombre de ces colonnes diminué du rang de la matrice. Ici, si $\beta \neq 5$, le rang de la matrice étant égal à 3, il y a une seule relation linéaire entre les 4 colonnes de la matrice. Pour $\beta = 5$, le rang de la matrice est égal à 2 et il y a donc 2 relations linéaires entre les 4 colonnes de la matrice.