Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2023

MATH0013 - Algèbre
Évaluation formative

Question 1

Parmi les propositions ci-dessous, lesquelles décrivent une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ?$$

- ■ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\+2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\+2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Soit

$$\mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x}_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{x}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

On peut observer d'emblée que $\mathrm{x}_2 = -2\mathrm{x}_1$ de sorte que l'enveloppe linéaire des trois vecteurs est identique à celle des seuls vecteurs x_1 et x_3. Le vecteur x_2 peut donc être ignoré dans la description de cette enveloppe linéaire.

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1 et x_3.

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\mathrm{x}_1}{\sqrt{\mathrm{x}_1{}^T\mathrm{x}_1}} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{x}_1{}^T\mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2$$

soit

$$\mathrm{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\mathrm{y}_2 = \mathrm{x}_3 - (\mathrm{z}_1{}^T\mathrm{x}_3)\,\mathrm{z}_1$$

où

$$\mathrm{z}_1{}^T\mathrm{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Le calcul conduit donc à

$$y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient enfin le deuxième vecteur de base en divisant y_2 par sa norme,

$$z_2 = \frac{y_2}{\sqrt{{y_2}^T y_2}}$$

où

$$ {y_2}^T y_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(1+4+1) = \frac{3}{2}$$

de sorte que

$$z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire de x_1, x_2 et x_3.

L'enveloppe linéaire de x_1, x_2 et x_3 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est décrite par une base constituée de deux vecteurs. Si la procédure de Gram-Schmidt avait été poursuivie et appliquée au vecteur x_2, elle aurait conduit à $y_3 = 0$ auquel on ne peut associer un vecteur unitaire et qui ne doit pas être pris en compte dans la construction de la base recherchée. En particulier, les vecteurs $\{z_1, z_2, 0\}$ ne constituent pas une base de l'enveloppe linéaire considérée puisqu'ils ne sont pas linéairement indépendants.

Question 2

Soit **a**, **b** et **c**, 3 vecteurs linéairement indépendants. À quelle condition sur les paramètres α, β et γ les vecteurs $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, $\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ sont-ils linéairement indépendants ?

- ☐ $\alpha = \beta = \gamma$
- ☐ $\alpha\gamma + \beta = 0$
- ☐ $\alpha\gamma - \beta = 0$
- ☐ $\alpha\gamma - \beta \neq 0$
- ■ $\alpha\gamma + \beta \neq 0$
- ☐ α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Par définition de l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, $\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1(\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}) + \lambda_2(\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}) + \lambda_3(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La relation

$$\lambda_1(\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}) + \lambda_2(\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}) + \lambda_3(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{a}(\lambda_1 - \lambda_3) + \mathbf{b}(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) + \mathbf{c}(-\gamma\lambda_2 + \lambda_3) = \mathbf{0}$$

Puisque **a**, **b** et **c**, sont linéairement indépendants, celle-ci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0 \\ -\gamma\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La première équation conduit à $\lambda_1 = \lambda_3$. Profitant de cette relation pour éliminer λ_3 dans les deux dernières équations, on obtient

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \gamma\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

de sorte que $\lambda_1 = \gamma\lambda_2$ et, reportant ce résultat dans la première équation du système à 2 équations,

$$(\alpha\gamma + \beta)\lambda_2 = 0$$

Si $\alpha\gamma + \beta \neq 0$, on en déduit que le système possède la solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et les trois vecteurs considérés sont linéairement indépendants. Si $\alpha\gamma + \beta = 0$, par contre, le système possède une infinité de solutions $(\gamma\lambda_2, \lambda_2, \gamma\lambda_2)$ non nulles. Dans ce cas, les vecteurs sont donc linéairement dépendants.

Notons que le même résultat pourrait être obtenu en montrant que le déterminant de la matrice d'ordre 3 dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs proposés dans la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ est non nul si et seulement si $\alpha\gamma + \beta \neq 0$.

Question 3

Laquelle des expressions ci-dessous exprime la sesquilinéarité du produit scalaire dans un espace vectoriel complexe ?

- ☐ $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{c}_k \middle| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathbf{b}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bar{\mu}_k (\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k)$
- ☐ $\left(\sum_{k} \lambda_k \mathbf{c}_k \middle| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathbf{b}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k (\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k^*)$
- ☐ $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{c}_k \middle| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathbf{b}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bar{\mu}_k (\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k^*)$
- ☐ $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{c}_k \middle| \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathbf{b}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k (\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k)$
- ■ Aucune des réponses ci-dessus

Aucune des réponses données ci-dessus n'est correcte. La sesquilinéarité du produit scalaire dans un espace vectoriel complexe s'exprime par

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{c}_k \middle| \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \mathbf{b}_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_k \bar{\mu}_\ell (\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_\ell)$$

où, puisqu'on multiplie une somme de vecteurs par une autre somme de vecteurs, le résultat doit faire intervenir deux symboles sommatoires avec des indices différents. L'utilisation du même k comme indice des deux sommes dans le membre de gauche est ici source d'erreur et de confusion dans les différentes propositions. Remarquons que les coefficients de la deuxième somme doivent être conjugués quand ils sont mis en évidence.

Question 4

On donne les 3 vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ exprimés dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ de l'espace physique $\mathcal{E}$.

Que vaut $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$?

- ■ $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$
- ☐ $\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
- ☐ -2
- ☐ $\mathbf{0}$
- ☐ $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$
- ☐ $4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

En développant le double produit vectoriel, on a

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)(3) - (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(1)$$

puisque, les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ étant orthonormés, on a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ et

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 3 \quad \text{et} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = 1$$

Finalement,

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 3\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 4\,\mathbf{e}_3$$

Question 5

On donne les 3 vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ exprimés dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ de l'espace physique $\mathcal{E}$.

Que vaut $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$?

- ☐ $4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$
- ■ -2
- ☐ 2
- ☐ -4
- ☐ $\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$
- ☐ $-3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

En développant le produit mixte, on peut écrire

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Remarquons que toute permutation circulaire des 3 vecteurs conduit au même résultat. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + 3(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) - (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) - 3(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{0} + 3(-\mathbf{e}_3) - (-\mathbf{e}_2) - 3\mathbf{e}_1 = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

et, finalement,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 1 - 3 = -2$$

puisque, les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ étant orthonormés, on a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

De façon alternative, on peut obtenir le résultat en développant le déterminant de la matrice d'ordre 3 dont les colonnes sont formée des composantes des trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Question 6

Que vaut le produit scalaire $(\mathbf{b}|\mathbf{c})$ des vecteurs d'un espace vectoriel complexe dont les composantes dans une base orthonormée sont

$$\mathsf{b} = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ -i \end{pmatrix} \quad ?$$

- ☐ $2-2i$
- ■ -2
- ☐ $2+2i$
- ☐ 2
- ☐ $2i$
- ☐ $-2i$
- ☐ 0
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Le produit scalaire $(\mathbf{b}|\mathbf{c})$ des vecteurs donnés s'exprime sous forme matricielle par

$$\begin{aligned} \mathsf{c}^*\mathsf{b} = \bar{\mathsf{c}}^{\mathrm{T}}\mathsf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 2-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i+1 \end{pmatrix} \\ &= i-(2-i)i+i(i+1) = i-2i+i^2+i^2+i = -2 \end{aligned}$$

où on n'oublie pas de conjuguer les éléments du deuxième vecteur intervenant dans le produit scalaire.

Question 7

Simplifiez l'expression $[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}] - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ dans laquelle $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ désignent des vecteurs orthonormés de l'espace physique $\mathcal{E}$.

- ☐ 0
- ☐ 1
- ■ -1
- ☐ $\mathbf{0}$
- ☐ $\mathbf{b}$
- ☐ $\mathbf{c}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Remarquons d'abord que le résultat d'un produit mixte ou d'un produit scalaire est un nombre. Les réponses proposées sous la forme d'un vecteur peuvent donc être écartées d'emblée.

Puisque le produit mixte est invariant si on procède à une permutation circulaire des 3 vecteurs qui le composent, on a

$$[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}] - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \Big\{ (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \Big\} \cdot \mathbf{b} - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

Le double produit vectoriel apparaissant dans cette expression peut être développé et conduit à

$$\Big\{ (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \Big\} \cdot \mathbf{b} = \Big\{ \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \Big\} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 1$$

puisque les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont orthonormés, c'est-à-dire tels que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ et $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$.

Il vient finalement

$$[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}] - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1 - 2 = -1$$

Il est également possible d'évaluer l'expression donnée d'une autre façon en calculant

$$[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}] - 2\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}) - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1 - 2 = -1$$

puisque les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ étant orthonormés, on a $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ et $\|\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| \sin(\pi/2) = 1$.

Question 8

Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ l'espace

$$\mathsf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+\beta y+3z = \alpha\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

- ☐ $\alpha = 0$ et $\beta = 1$
- ☐ $\alpha = 0$ et $\beta = 0$
- ☐ $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$
- ☐ α quelconque et $\beta = 0$
- ☐ α et β quelconques
- ■ $\alpha = 0$ et β quelconque
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

E constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à la double condition qu'il soit non vide (qu'il contienne au moins le vecteur nul) et qu'il contienne les combinaisons linéaires de ses éléments.

- Un sous espace vectoriel doit toujours contenir le vecteur nul (obtenu en prenant une combinaison linéaire nulle de n'importe quel couple de ses vecteurs). Nous pouvons donc en conclure qu'il est nécessaire que $\alpha = 0$ puisque ce n'est que pour cette valeur de α que le vecteur nul $(0,0,0)$ appartient à E.
- La condition $\alpha = 0$ est également suffisante. D'une part, $(0,0,0)$ appartient alors à E. D'autre part, on montre comme suit que E contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments si $\alpha = 0$.

  Soit (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2), 2 vecteurs appartenant à E et vérifiant donc $x_1+\beta y_1+3z_1 = 0$ et $x_2+\beta y_2+3z_2 = 0$. En considérant une combinaison linéaire de ces vecteurs, on obtient

  $$\lambda_1(x_1,y_1,z_1)+\lambda_2(x_2,y_2,z_2) = (\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)$$

  Les composantes de cet élément de $\mathbb{R}^3$ vérifient

  $$(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)+\beta(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)+3(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2) = \lambda_1(x_1+\beta y_1+3z_1)+\lambda_2(x_2+\beta y_2+3z_2) = 0$$

  de sorte que la combinaison linéaire appartient à E.

En conclusion, E constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ssi $\alpha = 0$.