Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2022

MATH0013 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Question I

Déterminez une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ dont les composantes dans une base orthonormée sont

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Question II

i. Soient trois vecteurs géométriques **a**, **b** et **c** non nuls. Montrez que

$$\left[(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\right] \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$$

est nul si et seulement si les trois vecteurs **a**, **b** et **c** sont coplanaires.

ii. Si **a**, **b** et **c** sont linéairement indépendants, les vecteurs $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ et $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez.

iii. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathtt{F} = \{\mathsf{X} \in \mathbb{R}_2^2 : \mathsf{AX} = \mathsf{XA}\}$$

(a) Montrez que $\mathtt{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}_2^2$ des matrices réelles d'ordre 2.

(b) Déterminez la dimension de $\mathtt{F}$ et trouvez une base de $\mathtt{F}$.

Question I

Soit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pas de pénalité si la procédure est appliquée aux 4 vecteurs sans remarquer leur dépendance linéaire.

On peut observer d'emblée que $x_2 = -x_1$ de sorte que l'enveloppe linéaire des 4 vecteurs est identique à celle des seuls vecteurs x_1, x_3 et x_4. Le vecteur x_2 peut donc être ignoré dans la description de cette enveloppe linéaire.

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1, x_3 et x_4.

Principe = recours à l'orthonormation : 1 pt

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^T x_1}} \qquad \text{où} \qquad {x_1}^T x_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

Formules/procédure d'orthomormation : 3 pts (Ensuite, les points sont attribués uniquement si les valeurs exactes sont fournies)

soit

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Premier vecteur de base : 2 pts

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$y_2 = x_3 - ({z_1}^T x_3)\, z_1$$

où

$${z_1}^T x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$$

Le calcul conduit donc à

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On obtient ensuite le deuxième vecteur de la base orthonormée en divisant y_2 par sa norme,

$$z_2 = \frac{y_2}{\sqrt{{y_2}^T y_2}}$$

où

$${y_2}^T y_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

de sorte que

Deuxième vecteur de base : 3 pts

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\mathsf{y}_3 = \mathsf{x}_4 - (\mathsf{z}_1{}^{\mathsf{T}}\mathsf{x}_4)\,\mathsf{z}_1 - (\mathsf{z}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{x}_4)\,\mathsf{z}_2$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^{\mathsf{T}}\mathsf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} = -\frac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$$

et

$$\mathsf{z}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} = -\sqrt{2}$$

Le calcul conduit donc à

Nombre correct de vecteurs dans la base : 1 pt

$$\mathsf{y}_3 = \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ce vecteur nul nous indique que les 3 vecteurs x_1, x_3 et x_4 ne sont pas linéairement indépendants. Leur enveloppe linéaire est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

Pénalité de 2 pts si un vecteur nul fait partie de la base

En conclusion, les vecteurs

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs donnés.

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

Application correcte de la formule du double produit vectoriel : 2 pts

Produit vectoriel perpendiculaire aux deux vecteurs multipliés : 1 pt

Identification d'un produit mixte : 1 pt

i. En appliquant la propriété du double produit vectoriel

$$\mathbf{x}\wedge(\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{z}$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$, $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ et $\mathbf{z} = \mathbf{b}$, on a

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) &= \big\{(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}\big\}\mathbf{a} - \big\{(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}\big\}\mathbf{b}\\ &= \mathbf{0} - \big\{(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}\big\}\mathbf{b}\\ &= -[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

où les simplifications ont été réalisées en tenant compte de ce que le produit vectoriel est perpendiculaire aux deux vecteurs multipliés et que l'on reconnait en $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$ le produit mixte $[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$ par permutation circulaire.

Dès lors, l'expression proposée peut s'écrire sous la forme

Démonstration avec utilisation correcte des propriétés des produits mixte, vectoriel et scalaire : 1 pt

$$\begin{aligned}\big[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\big]\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}) &= -[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c})\\ &= [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\\ &= [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que le produit mixte change de signe en cas de permutation anti-circulaire des 3 vecteurs ou, de façon équivalente, de l'anti-commutativité du produit vectoriel.

La proposition de l'énoncé s'en déduit aussitôt puisque le produit mixte $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ de trois vecteurs est nul si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement dépendants ce qui, d'un point de vue géométrique, signifie que les trois vecteurs sont coplanaires.

Notations correctes : vecteurs soulignés, point du produit scalaire, ... : 1 pt

CNS d'annulation du produit mixte : 1 pt

Conclusion géométrique : 1 pt

Total i. : 8 pts

ii. Par définition de l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}-2\mathbf{c}$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\lambda_2(3\mathbf{a}-\mathbf{b})+\lambda_3(\mathbf{b}-2\mathbf{c})=\mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Connaissance de la définition générale de l'indépendance linéaire : 1 pt

La relation

$$\lambda_1(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\lambda_2(3\mathbf{a}-\mathbf{b})+\lambda_3(\mathbf{b}-2\mathbf{c})=\mathbf{0}$$

peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{a}(\lambda_1+3\lambda_2)+\mathbf{b}(-\lambda_2+\lambda_3)+\mathbf{c}(\lambda_1-2\lambda_3)=\mathbf{0}$$

Mise en oeuvre dans le cas particulier étudié : 1 pt

Puisque $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, sont linéairement indépendants, celle-ci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1+3\lambda_2=0 \\ -\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1-2\lambda_3=0 \end{cases}$$

Utilisation de l'hypothèse : 1 pt

Système pour les λ_i : 1 pt

La deuxième et la troisième équation donnent respectivement $\lambda_2=\lambda_3$ et $\lambda_1=2\lambda_3$, de sorte que, en substituant dans la première équation, on obtient $5\lambda_3=0$.

On en conclut que ce système possède la solution unique $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ et que les trois vecteurs considérés sont linéairement indépendants.

Conclusion (si justifiée) : 1 pt

Total ii. : 5 pts

On peut également raisonner sur base des composantes des vecteurs considérés.

Les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ étant linéairement indépendants, ils constituent une base de leur enveloppe linéaire. On peut donc former une matrice A en disposant en colonnes les composantes dans cette base des vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, soit

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour la méthode alternative :

Justification de la base : 2 pts

Construction de la matrice des composantes : 1 pt

dont le déterminant

$$\det \mathsf{A}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

Valeur du déterminant ou du rang : 1 pt

Les vecteurs donnés sont donc linéairement indépendants.

Conclusion correcte : 1 pt

Total ii. (Méthode alternative) : 5 pts

iii. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathtt{F} = \{\mathsf{X} \in \mathbb{R}_2^2 : \mathsf{AX} = \mathsf{XA}\}$$

(a) $\mathtt{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2^2$ car

- $\mathtt{F}$ est non vide : la matrice nulle d'ordre 2 appartient à $\mathtt{F}$ puisque

$$\mathsf{A0} = 0 = \mathsf{0A}$$

- $\mathtt{F}$ contient les combinaisons linéaires de ses éléments.
Considérons X_1 et X_2 appartenant à $\mathtt{F}$. Ces deux matrices vérifient donc

$$\mathsf{AX}_1 = \mathsf{X}_1\mathsf{A} \quad \text{et} \quad \mathsf{AX}_2 = \mathsf{X}_2\mathsf{A}$$

de sorte que, quels que soient α et $\beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha\mathsf{X}_1 + \beta\mathsf{X}_2 \in \mathtt{F}$$

puisque

$$\mathsf{A}(\alpha\mathsf{X}_1 + \beta\mathsf{X}_2) = \alpha\mathsf{AX}_1 + \beta\mathsf{AX}_2 = \alpha\mathsf{X}_1\mathsf{A} + \beta\mathsf{X}_2\mathsf{A} = (\alpha\mathsf{X}_1 + \beta\mathsf{X}_2)\mathsf{A}$$

$\mathtt{F}$ est non vide : 2 pts, dont 1 pt pour l'énoncé de la propriété et 1 pt pour la démo.

$\mathtt{F}$ contient les combinaisons linéaires de ses éléments : 3 pts, dont 1 pt pour l'énoncé de la propriété et 2 pts pour la démo.

Total (a) : 5 pts

(b) Les matrices X appartenant à $\mathtt{F}$ sont telles que

$$\mathsf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{XA}$$

ou encore, en effectuant les produits matriciels,

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{cases} a+c = a \\ b+d = a \\ c = 0 \end{cases}$$

Elles sont donc de la forme

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Forme générale des matrices X de $\mathtt{F}$: 2 pts

Toutes ces matrices s'expriment en fonction de deux paramètres et peuvent s'obtenir comme combinaison linéaire des matrices

$$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identification d'une base correcte : 2 pts

En effet,

$$\begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration de caractère générateur de cette base : 1 pt

Les matrices B_1 et B_2 sont également linéairement indépendantes puisque

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Démonstration de l'indépendance linéaire : 1 pt

Les matrices B_1 et B_2 constituent donc une base de $\mathtt{F}$ qui est dès lors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2^2$ de dimension 2.

Dimension de $\mathtt{F}$: 1 pt

Total (b) : 7 pts

Total iii. : 12 pts

TOTAL QII : 25 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

- Il n'est pas nécessaire de vérifier si des vecteurs sont linéairement indépendants avant de leur appliquer la procédure de Gram-Schmidt. Si les vecteurs sont linéairement dépendants, la procédure conduit à construire un ou plusieurs vecteurs nuls qui doivent simplement être écartés ; ces vecteurs nuls ne font évidemment pas partie de la base orthonormée recherchée. En poursuivant la procédure jusqu'à épuisement de la liste des vecteurs donnés, on obtient une base orthonormée qui comprend dans ce cas moins de vecteurs que le nombre initial de vecteurs, *i.e.* la dimension de l'enveloppe linéaire des vecteurs initiaux est inférieure au nombre de ces vecteurs. Dans l'exercice de cette évaluation, quatre vecteurs sont donnés mais la base orthonormée ne comprend que deux vecteurs, ce qui indique que l'enveloppe linéaire de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

  Néanmoins, quand, comme ici, un vecteur est manifestement multiple d'un autre vecteur ($\mathsf{x}_2 = -\mathsf{x}_1$), la procédure peut évidemment être appliquée en écartant d'emblée l'un de ces deux vecteurs.

- Il est impératif de respecter les notations et de ne pas confondre les vecteurs et leur représentation matricielle dans une base donnée.
  Les vecteurs sont indiqués en gras dans les textes imprimés et sont soulignés dans les textes manuscrits. Les matrices (colonnes) ne sont pas soulignées. Autant que possible, on essayera d'utiliser des notations permettant de distinguer les matrices des vecteurs. Dans un texte manuscrit, on écrira donc

  $$\underline{z}_1 = \frac{\underline{x}_1}{\|\underline{x}_1\|} = \frac{\underline{x}_1}{\sqrt{(\underline{x}_1|\underline{x}_1)}}$$

  quand on veut désigner des vecteurs et

  $$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\|\mathsf{x}_1\|} = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1}}$$

  pour désigner des matrices et des opérations matricielles.
  L'énoncé impliquant des matrices colonnes, il convenait d'écrire

  $$\mathsf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et non pas} \quad \underline{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Dans $\mathbb{C}^3$, ensemble des matrices-colonnes à 3 composantes, le produit scalaire de x et z s'écrit et se calcule en formant $\mathsf{z}^*\mathsf{x} = \bar{\mathsf{z}}^T\mathsf{x}$. Par contre, on ne peut utiliser la notation $\underline{z}^*\underline{x}$ pour exprimer le produit scalaire des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{z}$. Dans ce contexte vectoriel, on doit écrire $(\underline{x}\,|\underline{z})$. Rappelons que l'écriture $\underline{x}\cdot\underline{z}$ est réservée au produit scalaire de vecteurs géométriques.
- Les erreurs de calcul dans ce type d'exercice peuvent être facilement détectées en vérifiant que les vecteurs de base obtenus sont bien unitaires et orthogonaux deux à deux.

Question II

i.
- L'énoncé à démontrer est construit autour d'une double implication. Il ne faut donc pas se contenter de démontrer que l'expression donnée est nulle si les vecteurs **a**, **b** et **c** sont coplanaires mais aussi démontrer la réciproque, à savoir que l'annulation de l'expression implique que **a**, **b** et **c** sont coplanaires. Pour ce faire, il est utile de commencer par simplifier l'expression proposée.
- Le respect des notations introduites dans le cours est important. En particulier, il est indispensable de souligner **tous** les vecteurs, de ne pas souligner les scalaires et de réserver le point aux produits scalaires entre vecteurs géométriques. La précision dans les notations est un élément essentiel pour permettre de distinguer aisément la nature scalaire ou vectorielle des opérandes et d'appliquer ainsi les règles et propriétés appropriées.
  Par exemple, l'expression $[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})]\mathbf{b}$ est un vecteur obtenu en multipliant le vecteur **b** par le scalaire $[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})]$. Le fait d'introduire par erreur un point entre le scalaire et le vecteur en écrivant
  $$[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})]\cdot\mathbf{b}$$
  conduit à une expression qui n'a aucun sens. Certains vont cependant jusqu'à déduire, à tort, que cette expression est nulle parce que le vecteur **b** est perpendiculaire au produit vectoriel $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ alors que l'expression entre crochets ne désigne pas un vecteur mais un scalaire.
- La connaissance des produits scalaire, vectoriel et mixte et de leurs propriétés est indispensable. En particulier, l'annulation de ces produits n'a pas seulement lieu si l'un des vecteurs multipliés est nul. Le produit scalaire s'annule aussi si les deux vecteurs sont perpendiculaires, le produit vectoriel s'ils sont parallèles et le produit mixte si les 3 vecteurs sont linéairement dépendants.

ii.
- La définition de l'indépendance linéaire doit être écrite correctement, sans oublier l'implication sur les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
  Les vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendants lorsque
  $$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$$
  Notons aussi que le second membre de la première égalité est le vecteur nul **0** et pas le scalaire 0. Les éléments apparaissant de part et d'autre d'une égalité doivent toujours avoir la même nature.
- La réécriture de
  $$\lambda_1(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\lambda_2(3\mathbf{a}-\mathbf{b})+\lambda_3(\mathbf{b}-2\mathbf{c})=\mathbf{0}$$
  sous la forme
  $$[\lambda_1\mathbf{a}-\lambda_2\mathbf{b}-2\lambda_3\mathbf{c})]+[\lambda_1\mathbf{c}+3\lambda_2\mathbf{a}+\lambda_3\mathbf{b}]=\mathbf{0}$$
  ne permet pas de conclure directement que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ en se basant sur le fait que chacune des expressions entre crochets est nulle. Ce n'est évidemment pas forcément la cas.

iii. (a)
- Un ensemble constitue un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel `E` s'il est non vide et contient les combinaisons linéaires de ses éléments. Ce sont les seules propriétés à vérifier parmi celles définissant un espace vectoriel car, dans le cas d'un sous-espace vectoriel, les propriétés requises des opérations (associativité, distributivité, commutativité) découlent des propriétés correspondantes valables dans l'espace vectoriel.

- Pour montrer qu'un ensemble est non vide, il faut en donner un élément et justifier que cet élément appartient bien à l'ensemble. Il ne suffit pas d'affirmer que l'ensemble est non vide sans aucune justification.
- Pour justifier qu'un ensemble $\mathtt{F}$ contient les combinaisons linéaires de ses éléments, il faut le démontrer en envisageant une combinaison linéaire tout à fait générale. On peut également considérer séparément une somme de deux éléments et un multiple d'un élément mais la vérification d'un seul aspect (somme ou multiple) ne suffit pas.

(b)
- La dimension de $\mathtt{F}$ se déduit du nombre d'éléments dans une base de $\mathtt{F}$. Il fallait donc commencer par identifier une telle base.
- La base recherchée doit évidemment être constituée d'éléments de $\mathtt{F}$, c'est-à-dire de matrices $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^2_2$ telles que $\mathsf{AX} = \mathsf{XA}$.
  En particulier, les matrices
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  ne peuvent constituer une base de $\mathtt{F}$ puisqu'aucune d'elles n'appartient à $\mathtt{F}$.
- Pour que des éléments constituent une base de $\mathtt{F}$, il doivent être linéairement indépendants et générateurs de $\mathtt{F}$. Ces deux propriétés doivent être vérifiées.