Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0013 - Algèbre
Évaluation formative

Novembre 2021

Question 1

Parmi les propositions ci-dessous, lesquelles décrivent une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ?$$

- ■ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\+2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\+2/\sqrt{6}\\+1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Soit

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

On peut observer d'emblée que $\mathsf{x}_2 = -2\mathsf{x}_1$ de sorte que l'enveloppe linéaire des trois vecteurs est identique à celle des seuls vecteurs x_1 et x_3. Le vecteur x_2 peut donc être ignoré dans la description de cette enveloppe linéaire.

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1 et x_3.

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^T\mathsf{x}_1}} \qquad \text{où} \qquad \mathsf{x}_1{}^T\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2$$

soit

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_3 - (\mathsf{z}_1{}^T\mathsf{x}_3)\,\mathsf{z}_1$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^T\mathsf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Le calcul conduit donc à

$$\mathsf{y}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

On obtient enfin le deuxième vecteur de base en divisant y_2 par sa norme,

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{y}_2}{\sqrt{\mathsf{y}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{y}_2}}$$

où

$$\mathsf{y}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{y}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}(1+4+1) = \frac{3}{2}$$

de sorte que

$$\mathsf{z}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire de x_1, x_2 et x_3.

L'enveloppe linéaire de x_1, x_2 et x_3 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est décrite par une base constituée de deux vecteurs. Si la procédure de Gram-Schmidt avait été poursuivie et appliquée au vecteur x_2, elle aurait conduit à $\mathsf{y}_3 = 0$ auquel on ne peut associer un vecteur unitaire et qui ne doit pas être pris en compte dans la construction de la base recherchée. En particulier, les vecteurs $\{\mathsf{z}_1,\ \mathsf{z}_2,\ 0\}$ ne constituent pas une base de l'enveloppe linéaire considérée puisqu'ils ne sont pas linéairement indépendants.

Question 2

Simplifiez l'expression $[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\wedge\mathbf{b}] - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ dans laquelle $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ désignent des vecteurs orthonormés de l'espace physique $\mathcal{E}$.

☐ 0	☐ $\mathbf{0}$
☐ 1	☐ $\mathbf{b}$
■ -1	☐ $\mathbf{c}$
	☐ Aucune des réponses ci-dessus

Remarquons d'abord que le résultat d'un produit mixte ou d'un produit scalaire est un nombre. Les réponses proposées sous la forme d'un vecteur peuvent donc être écartées d'emblée.

Puisque le produit mixte est invariant si on procède à une permutation circulaire des 3 vecteurs qui le composent, on a

$$[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\wedge\mathbf{b}] - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = [\mathbf{c}\wedge\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = \Big\{(\mathbf{c}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}\Big\}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$$

Le double produit vectoriel apparaissant dans cette expression peut être développé et conduit à

$$\Big\{(\mathbf{c}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}\Big\}\cdot\mathbf{b} = \Big\{\mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\Big\}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = 1$$

puisque les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont orthonormés, c'est-à-dire tels que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = 1$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ et $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$.

Il vient finalement

$$[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{c}\wedge\mathbf{b}]-2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=1-2=-1$$

Il est également possible d'évaluer l'expression donnée d'une autre façon en calculant

$$[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{c}\wedge\mathbf{b}]-2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{c}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{b})-2\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\|\mathbf{c}\wedge\mathbf{b}\|^2-2\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=1-2\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=1-2=-1$$

puisque les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ étant orthonormés, on a $\|\mathbf{b}\|=\|\mathbf{c}\|=1$ et $\|\mathbf{c}\wedge\mathbf{b}\|=\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin(\pi/2)=1$.

Question 3

Laquelle des expressions ci-dessous exprime la sesquilinéarité du produit scalaire dans un espace vectoriel complexe ?

- ☐ $\left(\sum_k \lambda_k\mathbf{c}_k\middle|\sum_k \mu_k\mathbf{b}_k\right)=\sum_k\lambda_k\overline{\mu}_k(\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k)$
- ☐ $\left(\sum_k \lambda_k\mathbf{c}_k\middle|\sum_k \mu_k\mathbf{b}_k\right)=\sum_k\lambda_k\overline{\mu}_k(\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k^*)$
- ☐ $\left(\sum_k \lambda_k\mathbf{c}_k\middle|\sum_k \mu_k\mathbf{b}_k\right)=\sum_k\lambda_k\mu_k(\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k^*)$
- ☐ $\left(\sum_k \lambda_k\mathbf{c}_k\middle|\sum_k \mu_k\mathbf{b}_k\right)=\sum_k\lambda_k\mu_k(\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_k)$
- ■ Aucune des réponses ci-dessus

Aucune des réponses données ci-dessus n'est correcte. La sesquilinéarité du produit scalaire dans un espace vectoriel complexe s'exprime par

$$\left(\sum_k \lambda_k\mathbf{c}_k\middle|\sum_l \mu_l\mathbf{b}_l\right)=\sum_k\sum_l\lambda_k\overline{\mu}_l(\mathbf{c}_k|\mathbf{b}_l)$$

où, puisqu'on multiplie une somme de vecteurs par une autre somme de vecteurs, le résultat doit faire intervenir deux symboles sommatoires avec des indices différents. Remarquons que les coefficients de la deuxième somme doivent être conjugués quand ils sont mis en évidence.

Question 4

Que vaut le produit scalaire $(\mathbf{b}|\mathbf{c})$ des vecteurs d'un espace vectoriel complexe dont les composantes dans une base orthonormée sont

$$\mathsf{b}=\begin{pmatrix}1\\1+i\\1-2i\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mathsf{c}=\begin{pmatrix}-i\\1-2i\\1\end{pmatrix}\quad ?$$

- ☐ 0
- ■ $2i$
- ☐ $-2i$
- ☐ $4-4i$
- ☐ $4+4i$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Le produit scalaire $(\mathbf{b}|\mathbf{c})$ des vecteurs donnés s'exprime sous forme matricielle par

$$\begin{aligned}\mathsf{c}^*\mathsf{b}=\overline{\mathsf{c}}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}&=\begin{pmatrix}i & 1+2i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1+i\\1-2i\end{pmatrix}\\&=i+(1+2i)(1+i)+1-2i=i+1+2i+i-2+1-2i=2i\end{aligned}$$

où on n'oublie pas de conjuguer les éléments du deuxième vecteur intervenant dans le produit scalaire.

Question 5

On donne les 3 vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ exprimés dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de l'espace physique $\mathcal{E}$. Que vaut $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$?

- ■ $4\mathbf{e}_2$
- ☐ $\mathbf{0}$
- ☐ $2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$
- ☐ $-2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$
- ☐ 0
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

En développant le double produit vectoriel, on a

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)(2) - (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(-2)$$

puisque, les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ étant orthonormés, on a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ et

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2 \quad \text{et} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = -2$$

Finalement,

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 4\,\mathbf{e}_2$$

Question 6

Soit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, 3 vecteurs linéairement indépendants. À quelle condition sur les paramètres α et β les vecteurs $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{c} - \beta\mathbf{a}$ sont-ils linéairement indépendants ?

- ☐ $\alpha = \beta$
- ☐ $\alpha \neq \beta$
- ■ $\alpha + \beta \neq 0$
- ☐ α et $\beta \in \mathbb{R}$
- ☐ $\alpha + \beta = 0$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Par définition de l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{c} - \beta\mathbf{a}$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \lambda_2(\alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \lambda_3(\mathbf{c} - \beta\mathbf{a}) = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La relation

$$\lambda_1(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \lambda_2(\alpha\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \lambda_3(\mathbf{c} - \beta\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{a}(\lambda_1 - \beta\lambda_3) + \mathbf{b}(\lambda_1 + \alpha\lambda_2) + \mathbf{c}(-\lambda_2 + \lambda_3) = \mathbf{0}$$

Puisque $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, sont linéairement indépendants, celle-ci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 - \beta\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation conduit à $\lambda_2 = \lambda_3$. Profitant de cette relation pour éliminer λ_3 dans les deux premières équations, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 - \beta\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha \neq -\beta$, on en déduit que le système possède la solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et les trois vecteurs considérés sont linéairement indépendants. Si $\alpha = -\beta$, par contre, le système possède une infinité de solutions différentes de la solution triviale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Dans ce cas, les vecteurs sont donc linéairement dépendants.

Question 7

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E et $\mathbf{u}$ un vecteur constant de E. À quelle condition

$$\mathsf{E}_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathsf{E}_1\}$$

constitue-t-il un sous-espace vectoriel de E ?

- ☐ $\|\mathbf{u}\| = 1$
- ■ $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$
- ☐ $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_{\mathbf{u}}$
- ☐ E_1 est de dimension 2
- ☐ $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1^{\perp}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

$\mathsf{E}_{\mathbf{u}}$ constitue un sous-espace vectoriel de E à la double condition qu'il soit non vide et qu'il contienne les combinaisons linéaires de ses éléments.

- Soit $\mathbf{u} + \mathbf{y}_1$ et $\mathbf{u} + \mathbf{y}_2$ ($\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathsf{E}_1$) deux vecteurs de $\mathsf{E}_{\mathbf{u}}$. On a, en considérant une combinaison linéaire de ces vecteurs,

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{y}_1) + \beta(\mathbf{u} + \mathbf{y}_2) = (\alpha + \beta)\mathbf{u} + \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 = \mathbf{u} + \left[\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 + (\alpha + \beta - 1)\mathbf{u}\right]$$

  où $\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 \in \mathsf{E}_1$ puisque, E_1 étant un sous-espace vectoriel, il contient les combinaisons linéaires de ses éléments. Par ailleurs, $(\alpha + \beta - 1)\mathbf{u}$ est aussi un vecteur de E_1 quels que soient α et β ssi $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$.
  On a donc $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{y}_1) + \beta(\mathbf{u} + \mathbf{y}_2) \in \mathsf{E}_1$ ssi $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$.
- Dans le cas où $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$, $-\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$ et l'espace $\mathsf{E}_{\mathbf{u}}$ n'est pas vide puisqu'il contient en particulier le vecteur nul $\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u}$ (selon la définition de $\mathsf{E}_{\mathbf{u}}$ avec $\mathbf{y} = -\mathbf{u}$).

En conclusion, $\mathsf{E}_{\mathbf{u}}$ constitue un sous-espace vectoriel de E ssi $\mathbf{u} \in \mathsf{E}_1$.