Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2020

MATH0013-1 - Algèbre
Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif.

Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul·e et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures.

Dans le contexte de l'enseignement à distance et du télétravail, il n'est malheureusement pas possible de corriger les copies individuelles. Il est cependant important que vous vous entraîniez à rédiger entièrement les solutions. Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur `www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`.

Vous devriez réaliser cette évaluation formative pour le ***lundi 9 novembre****, date à laquelle une solution type sera publiée. Une séance en direct sera organisée via Blackboard-Collaborate à une date ultérieure pour que vous puissiez discuter de votre approche des différentes questions.*

Question I

Déterminez une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1, x_2 et x_3 de $\mathbb{C}^3$ donnés par

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question II

Simplifiez l'expression $[\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ où $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ désignent des vecteurs orthonormés de l'espace physique. Justifiez les manipulations effectuées.

Question III

Soit $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ un ensemble de $n \geq 2$ vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$.

i. Les vecteurs $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$, $\cdots$, $\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1$ sont-ils linéairement indépendants ?

ii. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\cdots$, $\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Justifiez vos réponses.

Question I

Soit

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut observer d'emblée que $\mathsf{x}_3 = i\mathsf{x}_2$ de sorte que l'enveloppe linéaire des trois vecteurs est identique à celle des seuls vecteurs x_1 et x_2 (ou x_1 et x_3). Le troisième vecteur peut donc être ignoré dans la description de cette enveloppe linéaire.

Pas de pénalité si la procédure est appliquée correctement aux 3 vecteurs

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Principe = recours à l'orthonormation : 1 pt
Formules/procédure d'orthomormation : 3 pts (Ensuite, les points sont attribués uniquement si les valeurs exactes sont fournies)

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1}}$$

où

$$\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1 = \overline{\mathsf{x}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = 2$$

soit

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Norme de x_1 : 1 pt
Premier vecteur z_1 : 2 pts

On notera que la procédure de Gram-Schmidt telle que décrite à la section 2.8.1 des notes de cours s'applique à des vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ quelconques et que, dans ce cas, le premier vecteur est donné par

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}$$

Lorsqu'elle est appliquée à des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ ou lorsque les vecteurs sont décrits par leurs composantes dans une base orthonormée, cette formule devient

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1^*\mathsf{x}_1}} \qquad \textit{puisque} \qquad \|\mathbf{x}_1\|^2 = \mathsf{x}_1^*\mathsf{x}_1$$

De façon alternative à la formulation matricielle $\mathsf{x}_1^*\mathsf{x}_1$, on peut calculer la norme en prenant la racine carrée de la somme des carrés des modules *des composantes,* i.e.

$$\|\mathsf{x}_1\| = \sqrt{|i|^2 + |0|^2 + |i|^2} = \sqrt{2}$$

Dans un espace vectoriel complexe, on veillera à ne pas oublier de travailler avec les modules de composantes. Un tel oubli conduirait ici au résultat visiblement inapproprié

$$\text{«} \sqrt{i^2 + 0^2 + i^2} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}\, i \text{»}$$

mais pourrait passer inaperçu dans d'autres circonstances.

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\mathsf{z}_2' = \mathsf{x}_2 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_2)\,\mathsf{z}_1 = \mathsf{x}_2 - (\overline{\mathsf{z}_1}{}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_2)\,\mathsf{z}_1$$

où

$$\overline{\mathsf{z}_1}{}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i & 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

Cette expression constitue la traduction dans $\mathbb{C}^3$ de l'expression générale

$$\mathbf{z}_2' = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1)\,\mathbf{z}_1$$

valable dans un espace vectoriel quelconque.
En particulier, le produit scalaire $(\mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1)$ peut être exprimé sous la forme $\mathsf{z}_1^*\mathsf{x}_2$ lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}^n$ ou lorsqu'on s'appuie sur les composantes des vecteurs dans une base orthonormée. Dans cette écriture, il faut conjuguer les composantes du second vecteur.
De façon alternative, le produit scalaire peut également être formé en sommant le produit des composantes du premier vecteur et du complexe conjugué des composantes du second vecteur, i.e.

$$1\,\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{2}}\right) + i\,\overline{0} + 0\,\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}$$

À nouveau, l'oubli de conjuguer les composantes du second vecteur conduit à une erreur.

Le calcul conduit donc à

$$\mathsf{z}_2' = \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix}i\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 2i\\ -1\end{pmatrix}$$

On obtient enfin le deuxième vecteur de base en divisant z_2' par sa norme, *i.e.*

Deuxième vecteur z_2 : 4 pts (dont 1 pt pour la valeur de $\overline{\mathsf{z}_1}{}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_2$ et 1 pt pour la norme de z_2')

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{z}_2'}{\sqrt{\mathsf{z}_2'{}^*\mathsf{z}_2'}}$$

où

$$\mathsf{z}_2'{}^*\mathsf{z}_2' = \overline{\mathsf{z}_2'}{}^{\mathrm{T}}\mathsf{z}_2' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2i\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}(1+4+1) = \frac{3}{2}$$

de sorte que

$$\mathsf{z}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 2i\\ -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2i\\ -1\end{pmatrix}$$

Conclusion : 1 pt
TOTAL QI : 12 PTS

Les vecteurs

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 0\\ i\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2i\\ -1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire de x_1, x_2 et x_3.

L'enveloppe linéaire de x_1, x_2 *et* x_3 *est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de* $\mathbb{C}^3$ *puisqu'elle est décrite par une base constituée de deux vecteurs.*

Si la procédure de Gram-Schmidt avait été poursuivie et appliquée au vecteur x_3*, elle aurait conduit à* $\mathsf{z}_3' = 0$ *auquel on ne peut associer un vecteur unitaire et qui ne doit pas être pris en compte dans la construction de la base recherchée. En particulier, les vecteurs* $\{\mathsf{z}_1,\ \mathsf{z}_2,\ 0\}$ *ne constituent pas une base de l'enveloppe linéaire considérée puisqu'ils ne sont pas linéairement indépendants. Affirmer que ces trois vecteurs forment la base recherchée serait sanctionné d'un retrait de 2 pts.*

Question II

L'expression donnée est le produit mixte des vecteurs $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ et $\mathbf{b}$. Il s'agit du scalaire

$$\Big((\mathbf{b}+\mathbf{c})\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}$$

En vertu de la distributivité des produits vectoriel et scalaire par rapport à l'addition des vecteurs, ce produit peut encore s'écrire

$$\Big(\mathbf{b}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}+\Big(\mathbf{c}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}$$

Cette expression se simplifie en

$$\Big(\mathbf{c}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}$$

puisque le produit vectoriel de deux vecteurs est perpendiculaire à ces vecteurs et que donc

$$\Big(\mathbf{b}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}=0$$

En développant le double produit vectoriel, on obtient

$$\Big(\mathbf{c}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot\mathbf{b}=\Big((\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\Big)\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=1$$

puisque les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont orthonormés, c'est-à-dire tels que $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=1$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=0$ et $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$.

Quelle que soit la méthode utilisée : Identification et écriture correcte du produit mixte (éventuellement avec une permutation circulaire) : 2 pts

Développements corrects de l'expression : 2 pts

Utilisation de l'hypothèse "vecteurs orthonormés" : 1 pt pour la perpendicularité et 1 pt pour le caractère unitaire

Valeur exacte : 2 pts

TOTAL QII : 8 PTS

Dans la formulation de la réponse, il convient de prêter une attention constante aux notations et à la nature des objets intervenant dans les différentes expressions.
Pour distinguer sans ambiguïté la nature des objets manipulés, il convient d'écrire tous les vecteurs en gras ou, dans un texte manuscrit, de les souligner systématiquement.
La nature des objets détermine les opérations dans lesquelles ceux-ci peuvent être utilisés.

- *Le produit scalaire se calcule à partir de deux vecteurs. Le résultat est un scalaire.*
- *Le produit vectoriel se calcule également en combinant deux vecteurs, mais le résultat est lui-même un vecteur.*
- *Le produit mixte fait intervenir trois vecteurs. Le résultat est un scalaire.*

Dans une expression mathématique impliquant des vecteurs, il convient d'être particulièrement précis dans l'utilisation du symbole '$\cdot$'. Celui-ci désigne le produit scalaire et doit donc apparaître de façon bien visible chaque fois qu'il s'agit de multiplier scalairement deux vecteurs (en gras ou souligné). Tout autre usage du symbole '$\cdot$' devrait être banni, à l'exception éventuelle de l'écriture du produit de deux nombres lorsque ceci est nécessaire à la compréhension. On évitera ainsi des expressions du type

$$2 \cdot \mathbf{a}, \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \qquad 2 \cdot \|\mathbf{a}\|$$

qui sont incorrectes ou laissent planer un doute sur la nature des objets manipulés.

De façon alternative, en se souvenant que le produit mixte ne change pas de valeur si on réalise une permutation circulaire des 3 vecteurs, on peut écrire

$$[\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}] = \Big(\mathbf{b}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})\Big)\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$$

puis, en vertu de la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition des vecteurs,

$$\Big(\mathbf{b}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})\Big)\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \Big((\mathbf{b}\wedge\mathbf{b})+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$$

Puisque $\mathbf{b}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{0}$,

$$\Big((\mathbf{b}\wedge\mathbf{b})+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\Big)\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \|\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\|^2$$

et donc, vu que $\|\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|\sin\theta$, où $\theta\in[0,\pi]$ est l'angle entre les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$,

$$[\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{b}] = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2\sin^2\theta$$

Finalement, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ étant orthonormés, on a $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ et $\theta = \pi/2$ de sorte que

$$[\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}, \mathbf{b}] = 1$$

Une pénalité allant jusque 2 points sera appliquée si les notations ne sont pas correctement utilisées : vecteurs pas soulignés, pas de point pour les produits scalaires, ...

Question III

i. Les vecteurs $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4$, $\cdots$, $\mathbf{a}_{n-1}-\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_n-\mathbf{a}_1$ sont manifestement linéairement dépendants puisque leur somme est nulle, *i.e.*

$$(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)+(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3)+(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4)+\cdots+(\mathbf{a}_{n-1}-\mathbf{a}_n)+(\mathbf{a}_n-\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$$

Écriture d'une combinaison linéaire nulle : 2 pts
Conclusion correcte : 1 pt
Total i. : 3 pts

De façon alternative, on peut considérer une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs :

Pour la méthode alternative 1 :

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)+\lambda_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3)+\lambda_3(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_4)+\cdots+\lambda_{n-1}(\mathbf{a}_{n-1}-\mathbf{a}_n)+\lambda_n(\mathbf{a}_n-\mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$$

que l'on peut encore écrire

$$\mathbf{a}_1(\lambda_1-\lambda_n)+\mathbf{a}_2(\lambda_2-\lambda_1)+\mathbf{a}_3(\lambda_3-\lambda_2)+\cdots+\mathbf{a}_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})+\mathbf{a}_n(\lambda_n-\lambda_{n-1}) = \mathbf{0}$$

Raisonnement rigoureux utilisant l'hypothèse : 2 pts ce qui, puisque les vecteurs $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants, implique

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = 0 \\ \lambda_n - \lambda_{n-1} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda_n$.

Conclusion correcte : 1 pt

Ceci montre que les vecteurs sont linéairement dépendants puisqu'on peut trouver des valeurs non toutes nulles des coefficients qui annulent leur combinaison linéaire. En particulier, on peut prendre, comme ci-dessus, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$.

Total i. (Méthode alternative) : 3 pts

Il est également possible de raisonner en travaillant avec les composantes des vecteurs considérés.

Pour la méthode alternative 2 :

Les vecteurs $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ étant linéairement indépendants, ils constituent une base de leur enveloppe linéaire. On peut donc former une matrice A en disposant en colonnes les composantes dans cette base des vecteurs $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$, $\cdots$, $\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_1$, soit

Justification de la base : 1 pt. On notera que les $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ ne constituent pas forcément une base de tout l'espace.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant les colonnes 2 à n à la première colonne, le calcul du déterminant de A conduit à

$$\det \mathsf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Construction de la matrice des composantes : 1 pt

Conclusion correcte : 1 pt

Total i. (Méthode alternative 2) : 3 pts

de sorte que les vecteurs donnés sont linéairement dépendants.

ii. Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\cdots$, $\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n$:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \lambda_3(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \\ \cdots + \lambda_{n-1}(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_{n-1}) + \lambda_n(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n) = \mathbf{0}$$

que l'on peut encore écrire

Connaissance de la définition de l'indépendance linéaire : 2 pts

$$\mathbf{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdots + \lambda_n) + \mathbf{a}_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n) + \mathbf{a}_3(\lambda_3 + \cdots + \lambda_n) \\ + \cdots + \mathbf{a}_{n-1}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \mathbf{a}_n \lambda_n = \mathbf{0}$$

ce qui, puisque les vecteurs $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants, implique

Mise en pratique : 2 pts

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \lambda_3+\cdots+\lambda_n=0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}+\lambda_n=0 \\ \lambda_n=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_{n-1}=\lambda_n=0$.

Ceci montre que les vecteurs sont linéairement indépendants puisque la seule façon d'annuler leur combinaison linéaire est de choisir des coefficients nuls.

Conclusion correcte : 1 pt

Total ii. : 5 pts

On peut également raisonner sur base des composantes des vecteurs considérés.

Pour la méthode alternative :

Les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ étant linéairement indépendants, ils constituent une base de leur enveloppe linéaire. On peut donc former une matrice A en disposant en colonnes les composantes dans cette base des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\cdots$, $\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_n$, soit

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Justification de la base : 2 pts. On notera que les $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ne constituent pas forcément une base de tout l'espace.

Construction de la matrice des composantes : 1 pt

Il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments de la diagonale principale valent 1 de sorte que $\det \mathsf{A}=1\neq 0$.

Valeur du déterminant ou du rang : 1 pt

Les vecteurs donnés sont donc linéairement indépendants.

Conclusion correcte : 1 pt

Total i. (Méthode alternative) : 5 pts

TOTAL QIII : 8 PTS