LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2019

MATH0013-1 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul·e et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures.

- *Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du **20 novembre**.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Déterminez une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1, x_2 et x_3 de $\mathbb{C}^4$ donnés par

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Question II

i. Des vecteurs $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …,$\mathbf{a}_n$ d'un espace vectoriel E de dimension N sont dits *affinement indépendants* lorsque $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0$, …, $\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$ sont linéairement indépendants.
   (a) Déterminez le nombre maximum de vecteurs affinement indépendants de E.
   (b) Montrez que, si $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sont affinement indépendants et si $(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)$ n'appartient pas à l'enveloppe linéaire des vecteurs $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_0)$, alors $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}$ sont affinements indépendants.

ii. Simplifiez au maximum l'expression

$$\Big[(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b}\Big] \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux de l'espace physique $\mathcal{E}$.

iii. L'ensemble des matrices normales d'ordre n constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n_n$? Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

Remarquons tout d'abord que $\mathsf{x}_2 = i\mathsf{x}_1$ de sorte que l'enveloppe linéaire des vecteurs donnés est aussi celle des seuls vecteurs x_1 et x_3 (ou x_2 et x_3).

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs

Pas de pénalité si la procédure est appliquée correctement aux 3 vecteurs

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Principe = recours à l'orthonormation : 1 pt

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

Formules/procédure d'orthomormation : 3 pts (Ensuite, les points sont attribués uniquement si les valeurs exactes sont fournies)

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1}}$$

où

$$\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1 = \overline{\mathsf{x}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} = 4$$

soit

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$$

Norme de x_1 : 1 pt
Premier vecteur z_1 : 2 pts

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_3 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_3)\mathsf{z}_1 = \mathsf{x}_3 - (\overline{\mathsf{z}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_3)\mathsf{z}_1$$

où

$$\overline{\mathsf{z}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i+i-1) = i$$

de sorte que

$$\mathsf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

On obtient enfin le deuxième vecteur de base en divisant y_2 par sa norme, *i.e.*

Deuxième vecteur z_2 : 4 pts (dont 1 pt pour la valeur de $\overline{\mathsf{z}_1}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_3$ et 1 pt pour la norme de y_2)

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{y}_2}{\sqrt{\mathsf{y}_2{}^*\mathsf{y}_2}}$$

où

$$\mathsf{y}_2{}^*\mathsf{y}_2 = \overline{\mathsf{y}_2}^{\mathrm{T}}\mathsf{y}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+i & -i & -1 & 1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(5+1+1+5) = 3$$

de sorte que

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$z_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \qquad z_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

Conclusion : 1 pt

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs donnés.

TOTAL QI : 12 PTS

Cette enveloppe linéaire est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. Si la procédure de Gram-Schmidt avait été appliquée aux 3 vecteurs x_1, x_2, x_3 donnés, elle aurait fourni deux vecteurs orthornormés et un vecteur identiquement nul.

Pas de point pour cette remarque

Question II

i. (a) L'espace vectoriel $\mathtt{E}$ étant de dimension N, il contient au maximum N vecteurs linéairement indépendants et donc $N+1$ vecteurs affinement indépendants.

Total (a) : 2 pts

(b) Les vecteurs $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{a}$ sont affinement indépendants si $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0$ et $\mathbf{a}-\mathbf{a}_0$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si

Expression mathématique de la thèse : 2 pts

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)+\lambda_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)+\lambda_3(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0)=\mathbf{0} \\ \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda=0$$

De

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)+\lambda_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)+\lambda_3(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0)=\mathbf{0} \qquad (\spadesuit)$$

on déduit d'abord que $\lambda=0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi on pourrait écrire

Utilisation de l'hypothèse sur $(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0)$: 1 pt

$$(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0)=-\frac{\lambda_1}{\lambda}(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)-\frac{\lambda_2}{\lambda}(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)-\frac{\lambda_3}{\lambda}(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)$$

ce qui doit être écarté puisque, par hypothèse, $(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0)$ n'appartient pas à l'enveloppe linéaire des vecteurs $(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)$, $(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)$.
Tenant compte du résultat $\lambda=0$, l'expression $(\spadesuit)$ devient

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)+\lambda_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)+\lambda_3(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)=\mathbf{0}$$

Cette relation ne peut être vérifiée que si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. En effet, les vecteurs $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ sont affinement indépendants, c'est-à-dire tels que $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0$ et $\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0$ sont linéairement indépendants. Dès lors,

Utilisation de l'hypothèse sur $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$: 1 pt

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0)+\lambda_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0)+\lambda_3(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_0)=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Conclusion : 1 pt

En conclusion, les vecteurs $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{a}$ sont bien affinement indépendants.

Total (b) : 5 pts

Total i. : 7 pts

ii. En exploitant la formule du double produit vectoriel, on a

Connaissance de la formule du double produit vectoriel : 1 pt

$$\begin{aligned}
\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \Big[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\
&= (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\
&= 2
\end{aligned}$$

puisque, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant unitaires,

Utilisation de l'hypothèse sur les normes : 1 pt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2=1 \quad \text{et} \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|^2=1$$

et, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant orthogonaux,

Utilisation de l'hypothèse d'orthogonalité : 1 pt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=0$$

Valeur exacte 1 pt

Notations correctes (vecteurs soulignés, scalaires pas soulignés, utilisation du point pour les seuls produits scalaires, doubles barres des normes : 1 pt

Total ii. : 5 pts

iii. L'ensemble des matrices normales d'ordre n constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$ s'il est non vide et s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Deux conditions à remplir (annoncées ou mises en pratique) : 1 pt

L'ensemble est bien non vide puisqu'il contient au moins la matrice nulle $0\in\mathbb{C}_n^n$ qui est normale puisque

$$00^*=0=0^*0$$

Donnée justifiée d'un élément de l'ensemble : 1 pt

Vérifions maintenant s'il contient bien les combinaisons linéaires de ses éléments. Considérons les matrices normales A et $B\in\mathbb{C}_n^n$ et vérifions si la matrice $\alpha A+\beta B$ est normale pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, c'est-à-dire si

Expression mathématique correcte de la thèse : 1 pt

$$(\alpha A+\beta B)^*(\alpha A+\beta B)=(\alpha A+\beta B)(\alpha A+\beta B)^* \qquad (\diamondsuit)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
(\alpha A+\beta B)^*(\alpha A+\beta B) &= (\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*)(\alpha A+\beta B)\\
&= \overline{\alpha}\alpha A^*A+\overline{\alpha}\beta A^*B+\overline{\beta}\alpha B^*A+\overline{\beta}\beta B^*B
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

Développements corrects : 1 pt

$$\begin{aligned}
(\alpha A+\beta B)(\alpha A+\beta B)^* &= (\alpha A+\beta B)(\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*)\\
&= \alpha\overline{\alpha}AA^*+\beta\overline{\alpha}BA^*+\alpha\overline{\beta}AB^*+\beta\overline{\beta}BB^*\\
&= \alpha\overline{\alpha}A^*A+\beta\overline{\alpha}BA^*+\alpha\overline{\beta}AB^*+\beta\overline{\beta}B^*B
\end{aligned}$$

où il a été tenu compte de

Utilisation des hypothèses de normalité : 1 pt

$$AA^*=A^*A \quad \text{et} \quad BB^*=B^*B$$

En injectant ces expression dans ($\diamondsuit$), on aboutit à la condition

$$\overline{\alpha}\beta(\mathsf{A}^*\mathsf{B}-\mathsf{B}\mathsf{A}^*)+\alpha\overline{\beta}(\mathsf{B}^*\mathsf{A}-\mathsf{A}\mathsf{B}^*)=0$$

qui ne peut être rencontrée quels que soient α et β que si

Condition à remplir : 1 pt

$$\mathsf{A}^*\mathsf{B}=\mathsf{B}\mathsf{A}^*$$

Cette condition n'est pas toujours vérifiée comme le montre le contre-exemple constitué des matrices

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ces matrices sont, respectivement, symétrique et anti-symétrique, donc normales. On calcule aisément

Contre-exemple : 1 pt

$$\mathsf{A}^*\mathsf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{B}\mathsf{A}^*=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\neq\mathsf{A}^*\mathsf{B}$$

En vertu du raisonnement précédent, les combinaisons linéaires de ces deux matrices ne seront donc pas toujours normales. En particulier, la combinaison linéaire

$$\mathsf{C}=\mathsf{A}+\mathsf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

n'est pas normale puisque

Tous les points de la question sont attribués si l'étudiant·e donne seulement un contre-exemple correct de deux matrices normales dont une combinaison linéaire n'est pas normale.

$$\mathsf{C}\mathsf{C}^*=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

alors que

$$\mathsf{C}^*\mathsf{C}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

L'ensemble de matrices normales d'ordre n ne constitue donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n_n$.

Conclusion : 1 pt

Total iii. : 8 pts

TOTAL QII : 20 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

- Il n'est pas nécessaire de vérifier si des vecteurs sont linéairement indépendants avant de leur appliquer la procédure de Gram-Schmidt. Si les vecteurs sont linéairement dépendants, la procédure conduit à construire un ou plusieurs vecteurs nuls qui doivent simplement être écartés : ces vecteurs nuls ne font évidemment pas partie de la base orthonormée recherchée. En poursuivant la procédure jusqu'à épuisement de la liste des vecteurs donnés, on obtient une base orthonormée qui comprend dans ce cas moins de vecteurs que le nombre initial de vecteurs, *i.e.* la dimension de l'enveloppe linéaire des vecteurs initiaux est inférieure au nombre de ces vecteurs. Dans l'exercice de cette évaluation, trois vecteurs sont donnés mais la base orthonormée ne comprend que deux vecteurs, ce qui indique que l'enveloppe linéaire de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.

  Néanmoins, quand, comme ici, un vecteur est manifestement multiple d'un autre vecteur ($\mathsf{x}_2 = i\mathsf{x}_1$), la procédure peut évidemment être appliquée en écartant d'emblée l'un de ces deux vecteurs.

  Par ailleurs, quand l'énoncé propose n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, il est intéressant de vérifier leur indépendance linéaire (en vérifiant si le déterminant de la matrice de leurs composantes est non nul) car, dans ce cas, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ décrit une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs et la procédure de Gram-Schmidt est inutile.

- Il est impératif de respecter les notations et de ne pas confondre les vecteurs et leur représentation matricielle dans une base donnée.
  Les vecteurs sont indiqués en gras dans les textes imprimés et sont soulignés dans les textes manuscrits. Les matrices (colonnes) ne sont pas soulignées. Autant que possible, on essayera d'utiliser des notations (fonte 'sans serif' dans les textes imprimés) permettant de distinguer les matrices des vecteurs. On écrira donc, par exemple,

  $$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1)}}$$

  quand on veut désigner des vecteurs et

  $$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\|\mathsf{x}_1\|} = \frac{\mathsf{x}_1}{\sqrt{\mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1}}$$

  dans une écriture matricielle.
  L'énoncé impliquant des matrices colonnes, il convenait d'écrire

  $$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\i\\i\end{pmatrix} \qquad \text{et non pas} \qquad \mathbf{z}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\i\\i\end{pmatrix}$$

  Dans $\mathbb{C}^4$, ensemble des matrices-colonnes à 4 composantes, le produit scalaire de x et z s'écrit et se calcule en formant $\mathsf{z}^*\mathsf{x} = \bar{\mathsf{z}}^T\mathsf{x}$. Par contre, on ne peut utiliser la notation $\mathbf{z}^*\mathbf{x}$ pour exprimer le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$. Dans ce contexte vectoriel, on doit écrire $(\mathbf{x}|\mathbf{z})$. Rappelons que le point médian $\cdot$ et l'écriture $\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$ sont réservés au produit scalaire de vecteurs géométriques.

- Comme rappelé ci-dessus, dans une base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$ peut être calculé en faisant appel aux composantes x et z de ces deux vecteurs par
$$(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \mathsf{z}^*\mathsf{x} = \bar{\mathsf{z}}^T\mathsf{x}$$
Telle est également l'expression du produit scalaire entre des éléments x et z de $\mathbb{C}^n$. Lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel complexe, il ne faut par oublier de conjuguer les composantes du deuxième vecteur lors de l'évaluation du produit scalaire.

Question II

i. - Il ne fallait pas confondre les nombres n et N. Selon l'énoncé, N désigne la dimension de l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ alors que n est un indice général utilisé dans la définition de l'indépendance affine et n'a rien à voir avec la dimension de $\mathtt{E}$.
   - L'expression
   $$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$
   ne constitue pas une formulation correcte de l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Pour traduire le fait que les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants, on doit écrire
   $$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$
   Notons aussi que le second membre de la première égalité est le vecteur nul $\mathbf{0}$ et pas le scalaire 0. Les éléments apparaissant de part et d'autre d'une égalité doivent toujours avoir la même nature.

ii. Le respect des notations introduites dans le cours est important. En particulier, il est indispensable de souligner **tous** les vecteurs, de ne pas souligner les scalaires et de réserver le point aux produits scalaires. La précision dans les notations est un élément essentiel pour permettre de distinguer aisément la nature scalaire ou vectorielle des opérandes et d'appliquer ainsi les règles et propriétés appropriées.
Par exemple, dans l'expression
$$\Big[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$
le produit scalaire $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$ est un nombre de sorte que l'expression entre crochet est le vecteur obtenu en multipliant le vecteur $\mathbf{b}$ par ce nombre $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$. Celui-ci peut être mis en évidence pour écrire
$$\Big[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\Big[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\Big] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\Big[\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\Big] = 1$$
en tenant compte de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ et $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Notons par ailleurs que, pour exprimer le carré de la norme d'un vecteur $\mathbf{a}$, les écriture $\mathbf{a}^2$, a^2, $||a||^2$ et $||a^2||$ ne sont pas correctes. On doit écrire $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ ou $||\mathbf{a}||^2$.

iii. - Un ensemble constitue un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ s'il est non vide et contient les combinaisons linéaires de ses éléments. Ce sont les seules propriétés à vérifier parmi celles définissant un espace vectoriel car, dans le cas d'un sous-espace vectoriel, les autres propriétés s'en déduisent automatiquement.

- L'énoncé proposé étant faux, l'identification d'un contre-exemple permettait de répondre à la question. Il faut dans ce cas montrer que le contre-exemple vérifie les hypothèses, c'est-à-dire ici donner deux matrices normales de $\mathbb{C}_n^n$, et qu'il contredit la thèse, c'est-à-dire montrer qu'une combinaison linéaire des matrices choisies n'est pas normale. On peut alors en conclure que l'ensemble des matrices normales de $\mathbb{C}_n^n$ n'est pas une sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$ puisqu'il ne contient pas toutes les combinaisons linéaires de ses éléments.
- La condition à remplir pour que toutes les combinaisons linéaires des matrices normales quelconques A et B soient normales est $\mathsf{A}^*\mathsf{B} = \mathsf{B}\mathsf{A}^*$. Le produit matriciel n'étant pas commutatif, ceci a bien sûr "beaucoup de chance" de ne pas toujours être vrai. Pour démontrer complètement la proposition, il faut cependant trouver un exemple de deux matrices normales A et B telles que $\mathsf{A}^*\mathsf{B} \neq \mathsf{B}\mathsf{A}^*$. Il est alors possible de vérifier qu'il existe une combinaison linéaire de ces matrices qui n'est pas normale.