Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2023

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Exprimez les éléments de la matrice $\mathsf{C} = \mathsf{AB}$ en fonction des éléments des matrices A, de dimensions $m \times n$, et B, de dimensions $p \times q$. Donnez la(les) condition(s) sur les dimensions m, n, p et q pour que le produit matriciel puisse être formé ainsi que les dimensions de la matrice C.

ii. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique caractérisé par une induction magnétique constante et un champ électrique périodique perpendiculaires entre eux est décrit par l'équation de Newton

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{c}\cos(\omega t) + \omega_c\,\mathbf{b} \wedge \frac{d\mathbf{s}}{dt} \qquad (\heartsuit)$$

où $\mathbf{s}$ est le vecteur position de la particule, ω et ω_c sont des constantes scalaires, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs constants mutuellement orthogonaux.

Sachant que $\mathbf{b}$ est unitaire, que, dans les conditions envisagées, $\mathbf{s}$ est perpendiculaire à $\mathbf{b}$ à chaque instant et que l'intégration temporelle de ($\heartsuit$) conduit à

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\mathbf{c}}{\omega}\sin(\omega t) + \omega_c\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{s}$$

montrez que le mouvement de la particule est aussi décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} + \omega_c^2\,\mathbf{s} = \mathbf{f}(t)$$

Déterminez la fonction vectorielle $\mathbf{f}(t)$.

iii. Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ \mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants et si $\mathcal{A}$ désigne une application linéaire unitaire, peut-on affirmer que $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1), \mathcal{A}(\mathbf{a}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{a}_n)$ sont linéairement indépendants ? Justifiez.

iv. Montrez que, si la matrice réelle A de dimensions $m \times n$ est de rang n, alors $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ est symétrique et définie positive.

v. Quelle relation existe-t-il entre les valeurs propres et les valeurs singulières d'une matrice carrée symétrique définie négative ? Justifiez.

Question II

On considère l'application linéaire $\mathcal{A}$ définie entre des espaces vectoriels réels $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$. Dans les bases orthonormées $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de $\mathtt{E}$ et $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ de $\mathtt{F}$, l'application linéaire est représentée par la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, tous les vecteurs $\mathbf{x} \in \mathtt{E}$ tels que

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 4\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$$

ii. Déterminez le rang de $\mathcal{A}$.

iii. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, une base orthonormée de $\ker\mathcal{A}$.

Question III

i. Calculez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en discutant en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle diagonalisable par une transformation de similitude ?

iii. Pour quelle(s) valeur(s) de α peut-on effectuer cette transformation par le biais d'une matrice orthogonale ?

Question I

i. Le produit matriciel AB peut être formé si le nombre de colonnes de A, de dimensions $m \times n$, est égal au nombre de lignes de B, de dimensions $p \times q$, c'est-à-dire si $n = p$. La matrice $\mathsf{C} = \mathsf{AB}$ est alors de dimensions $m \times q$ et les éléments de C sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \, \forall j \in \{1, \ldots, q\}$$

ii. Introduisons la vitesse

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\mathbf{c}}{\omega} \sin(\omega t) + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \mathbf{s}$$

dans l'équation

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{c} \cos(\omega t) + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} &= \mathbf{c} \cos(\omega t) + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \left[\frac{\mathbf{c}}{\omega} \sin(\omega t) + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \mathbf{s} \right] \\
&= \mathbf{c} \cos(\omega t) + \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) \, (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \omega_c^2 \, \mathbf{b} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{s}) \\
&= \mathbf{c} \cos(\omega t) + \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) \, (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \omega_c^2 [\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})] \\
&= \mathbf{c} \cos(\omega t) + \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) \, (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - \omega_c^2 \mathbf{s}
\end{aligned}$$

où on a utilisé $\mathbf{s} \cdot \mathbf{b} = 0$, puisque $\mathbf{s}$ et $\mathbf{b}$ sont perpendiculaires, et $\|\mathbf{b}\| = 1$, puisque $\mathbf{b}$ est unitaire. Finalement, il vient

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} + \omega_c^2 \mathbf{s} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{c} \cos(\omega t) + \frac{\omega_c}{\omega} \sin(\omega t) \, (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

iii. VRAI

L'application $\mathcal{A}$ étant unitaire, elle admet une application inverse $\mathcal{A}^{-1}$ égale à son adjointe $\mathcal{A}^*$. Cela étant, supposons que

$$\lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{a}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{a}_2) + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{a}_n) = \mathbf{0}$$

L'application de $\mathcal{A}^*$ aux deux membres de cette égalité permet d'écrire

$$\mathcal{A}^* \left[\lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{a}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{a}_2) + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{a}_n) \right] = \mathcal{A}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

soit

$$\lambda_1 \mathcal{A}^* \left[\mathcal{A}(\mathbf{a}_1) \right] + \lambda_2 \mathcal{A}^* \left[\mathcal{A}(\mathbf{a}_2) \right] + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}^* \left[\mathcal{A}(\mathbf{a}_n) \right] = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Si les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... $\mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants, cette dernière égalité ne peut être satisfaite que si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, ce qui établit le résultat annoncé.

iv. On peut aisément vérifier que la matrice $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$ est symétrique. En effet, cette matrice est carrée d'ordre n et égale à sa transposée puisque

$$\left(\mathsf{A}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \right)^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \left(\mathsf{A}^{\mathsf{T}} \right)^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \mathsf{A}$$

Pour montrer le caractère défini positif de $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$, on considère la forme quadratique

$$\mathsf{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \mathsf{x} = (\mathsf{A}\mathsf{x})^{\mathsf{T}} (\mathsf{A}\mathsf{x}) = \|\mathsf{A}\mathsf{x}\|^2 \geq 0$$

Ceci montre que la matrice considérée est au moins semi-définie positive.
Or, puisque $\rho(\mathsf{A}) = n$, le système homogène $\mathsf{A}\mathsf{x} = 0$ admet la solution unique $\mathsf{x} = 0$.
En conclusion, la matrice $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$ est définie positive puisque

$$\mathsf{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \mathsf{x} > 0 \quad \forall \mathsf{x} \neq 0$$

v. La matrice A étant symétrique, elle est réelle et telle que $\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \mathsf{A}$.

Les valeurs singulières de A sont donc ici les racines carrées des valeurs propres non nulles de $\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A} = \mathsf{A}^2$.

Si λ est une valeur propre de A et x un vecteur propre de A relatif à λ, c'est-à-dire si $\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}$ on a

$$\mathsf{A}^2\mathsf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \mathsf{A}(\lambda\mathsf{x}) = \lambda(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \lambda^2\mathsf{x}$$

de sorte que les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.

On en conclut que les valeurs singulières σ de A sont telles que $\sigma = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda| = -\lambda$ puisque $\lambda < 0$ vu que A est définie négative.

Question II

i. Matriciellement, le système à résoudre s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Construisons une forme normale échelonnée de $(\mathsf{A}|\mathsf{b})$ afin de tester la compatibilité de ce système et de le résoudre. Partant de

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

il vient successivement

$$\begin{array}{l} l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

puis,

$$c_2 \leftrightarrow c_4 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

où l'échange des colonnes doit s'accompagner de l'échange des inconnues correspondantes. Ensuite,

$$l_2 \to -l_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

puis,

$$l_1 \to l_1 - l_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

et enfin,

$$\begin{array}{l} l_1 \to l_1 - l_3 \\ l_2 \to l_2 + l_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \tag{$\diamondsuit$}$$

La solution s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $\mathbf{x} \in \mathtt{E}$ recherchés s'écrivent alors

$$\mathbf{x} = (3-2\lambda)\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ii. La forme normale échelonnée ($\diamondsuit$) indique que $\rho(\mathcal{A}) = 3$.

iii. Le noyau $\ker\mathcal{A}$ est l'ensemble des vecteur $\mathbf{x}$ tels que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. La résolution du point i. nous apprend que ce noyau peut être décrit par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tous les vecteurs du noyau peuvent donc s'exprimer comme multiples du vecteur normé

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

qui constitue la base recherchée. On notera que $\ker\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 comme le montre aussi le théorème du rang qui s'écrit ici

$$\dim\mathtt{E} = 4 = \dim\ker\mathcal{A} + \rho(\mathcal{A}) = \dim\ker\mathcal{A} + 3$$

Question III

i. Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{I})=0$$

On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ \alpha^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4\alpha^2] \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)-2\alpha][(1-\lambda)+2\alpha] \\
&= (1-\lambda)(1-2\alpha-\lambda)(1+2\alpha-\lambda)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=1-2\alpha \quad \text{et} \quad \lambda_3=1+2\alpha$$

Si $\alpha\neq 0$: ces trois valeurs propres sont distinctes.
Si $\alpha=0$: $\lambda=1$ est une valeur propre de multiplicité 3.

(a) Envisageons pour commencer le cas $\alpha\neq 0$.

- Les vecteurs propres de A relatifs à la valeur propre $\lambda_1=1$ sont les solutions w_1 non nulles du système

$$(\mathsf{A}-\mathbb{I})\mathsf{w}_1=0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

Échelonnons la matrice du système. D'abord, permutons les colonnes 1 et 2 et donc, les inconnues x et y correspondantes,

$$c_1\leftrightarrow c_2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, successivement, tenant compte de ce que $\alpha\neq 0$,

$$\begin{matrix} \ell_1\to\ell_1/4 \\ \ell_2\to\ell_2/\alpha^2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3\to\ell_3-\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}=\beta_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1\in\mathbb{R}_0$$

et

$$\mathsf{w}_1=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\beta_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1\in\mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres de A relatifs à la valeur propre $\lambda_2 = 1-2\alpha$ sont les solutions w_2 non nulles du système

$$[\mathsf{A}-(1-2\alpha)\mathbb{I}]\mathsf{w}_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Échelonnons la matrice du système. On a successivement, tenant compte de ce que $\alpha \neq 0$,

$$\begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1/(2\alpha) \\ \ell_2 \to \ell_2/\alpha^2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2/\alpha & 0 \\ 1 & 2/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2/\alpha \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres de A relatifs à la valeur propre $\lambda_3 = 1+2\alpha$ sont les solutions w_3 non nulles du système

$$[\mathsf{A}-(1+2\alpha)\mathbb{I}]\mathsf{w}_3 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -2\alpha & 4 & 0 \\ \alpha^2 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Échelonnons la matrice du système. On a successivement, tenant compte de ce que $\alpha \neq 0$,

$$\begin{matrix} \ell_1 \to -\ell_1/(2\alpha) \\ \ell_2 \to \ell_2/\alpha^2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2/\alpha & 0 \\ 1 & -2/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2/\alpha \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 \in \mathbb{R}_0$$

(b) Dans le cas où $\alpha = 0$, la matrice A devient

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs propres relatifs à son unique valeur propre 1 sont les solutions w non nulles du système

$$[\mathsf{A}-\mathbb{I}]\mathsf{w} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Échelonnons la matrice du système. D'abord, permutons les colonnes 1 et 2 et donc les inconnues x et y correspondantes,

$$c_1 \leftrightarrow c_2 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, successivement,

$$\ell_1 \to \ell_1/4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma, \delta) \neq (0,0)$$

et

$$\mathsf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma, \delta) \neq (0,0)$$

ii. Une matrice d'ordre n est diagonalisable si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. La matrice A est donc diagonalisable par une transformation de similitude pour toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_0$. En effet, elle possède alors 3 vecteurs propres linéairement indépendants puisque les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes d'une même matrice sont toujours linéairement indépendants. Par contre, elle n'est pas diagonalisable si $\alpha = 0$ car, dans ce cas, la matrice ne possède que 2 vecteurs propres linéairement indépendants comme le montre la solution obtenue ci-dessus.

iii. La matrice de changement de base (dans le cas où $\alpha \neq 0$) étant constituée des matrices-colonnes des composantes des vecteurs propres, elle sera orthogonale si on peut trouver 3 vecteurs propres orthogonaux et normés. Ce n'est pas possible puisque les vecteurs propres w_1 relatifs à λ_1 et w_2 relatifs à λ_2 ne sont jamais orthogonaux entre eux. On a en effet, puisque β_1 et β_2 sont non nuls,

$$\mathsf{w}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{w}_1 = \beta_2 \begin{pmatrix} 4 & -2\alpha & 1 \end{pmatrix} \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_2\beta_1 \neq 0$$

De façon équivalente, on peut raisonner en sachant que la transformation peut être effectuée par le biais d'une matrice orthogonale si et seulement si A est normale, *i.e.*, puisque A est réelle, si et seulement si $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

On a

$$\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^4 & 4+\alpha^2 & 0 \\ 4+\alpha^2 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & \alpha^2+4 & 4 \\ \alpha^2+4 & \alpha^4+1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces deux produits ne sont jamais égaux puisque, par exemple,

$$0 = (\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A})_{31} \neq (\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}})_{31} = 4$$

On en conclut que la matrice A n'est pas normale et ne peut donc être diagonalisée par une matrice de similitude orthogonale.