LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2018

MATH0013-1 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e) et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures et demie.

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du* ***17 octobre****.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Calculez le déterminant de la matrice A d'ordre 3 dont les éléments sont donnés par

$$a_{kl} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}(k-l)}, \quad k,l \in \{1,2,3\}$$

Question II

En discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs des paramètres réels a et b, déterminez le rang de la matrice carrée A d'ordre $n > 1$ définie par

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Question III

Soit w une matrice colonne de $n > 1$ éléments et la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{w}\mathsf{w}^* \\ \mathsf{w}^* \end{pmatrix}$$

- Déterminez les dimensions de A et $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
- La matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ est-elle hermitienne ? Normale ? Inversible ?

SOLUTION TYPE

Question I

Puisque ses éléments a_{kl} sont donnés par $a_{kl} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}(k-l)}$, la matrice A s'écrit

Expression de la matrice : 2 pts

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\frac{-2i\pi}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{-4i\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} & 1 & \mathrm{e}^{\frac{-2i\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}} & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} & 1 \end{pmatrix}$$

Une simple inspection de la matrice nous apprend que toutes les lignes sont multiples l'une de l'autre. On a en effet

$$\ell_3 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\,\ell_2 = \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}\,\ell_1$$

Dès lors,

$$\det \mathsf{A} = 0$$

Valeur du déterminant obtenue en remarquant la relation linéaire entre les lignes ou par calcul : 3 pts
TOTAL QI : 5 PTS

Question II

Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Effectuons des manipulations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée. Remarquant que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice vaut $\xi = a + (n-1)b$, on peut commencer par ajouter à la première ligne la somme des autres lignes, soit

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 3 pts

$$\ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n \qquad \begin{pmatrix} \xi & \xi & \xi & \cdots & \xi \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

A) Si $\xi = a + (n-1)b \neq 0$, on peut poursuivre la réduction par

Méthode de discussion appropriée, i.e. identifiant des cas de discussion uniquement quand c'est nécessaire (e.g. pour ne pas diviser par zéro) : 2 pts

$$\ell_1 \to \frac{\ell_1}{\xi} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 - b\ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \to \ell_n - b\ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix} \tag{2}$$

A.1) Si $a \neq b$, on peut alors avancer suivant

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \dfrac{\ell_2}{a-b} \\ \vdots \\ \ell_n \to \dfrac{\ell_n}{a-b} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 - \cdots - \ell_n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

On a donc $\rho(\mathsf{A}) = n$ si $a \neq (1-n)b$ et $a \neq b$.

Rang correct si $a \neq (1-n)b$ et $a \neq b$: 2 pts

A.2) Si $a = b$ (avec $a \neq (1-n)b$ donc $a = b \neq 0$), la matrice réduite s'écrit, en repartant de la forme (2),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\rho(\mathsf{A}) = 1$ si $a = b \neq 0$.

Rang correct si $a = b \neq 0$: 2 pts

B) Si $\xi = 0$, soit si $a = (1-n)b$, la matrice réduite s'écrit, en repartant de la forme (1),

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

B.1) Si $b = 0$, alors $a = (1-n)b = 0$ et la matrice est nulle.
Dans ce cas, on a donc $\rho(\mathsf{A}) = 0$.

Rang correct si $a = b = 0$: 2 pts

B.2) Si $b \neq 0$, en divisant chacune des lignes par b et en permutant la première et la dernière ligne, il vient, puisque $a/b = 1-n$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & (1-n) \\ 1 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & (1-n) & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On poursuit alors la réduction par

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_{n-1} \to \ell_{n-1} - \ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & (1-n) \\ 0 & -n & 0 & & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -n & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, puisque $n \neq 0$,

$$\begin{array}{l} \\ \ell_2 \to -\ell_2/n \\ \vdots \\ \ell_{n-1} \to -\ell_{n-1}/n \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & (1-n) \\ 0 & 1 & 0 & & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 - \cdots - \ell_{n-1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & -1 \\ & \mathbb{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette forme montre que $\rho(\mathsf{A}) = n-1$ si $a = (1-n)b \neq 0$.

Rang correct si $a = (1-n)b \neq 0$: 2 pts

En conclusion :

- ◇ si $a = b = 0$, $\rho(\mathsf{A}) = 0$;
- ◇ si $a = b \neq 0$, $\rho(\mathsf{A}) = 1$;
- ◇ si $a = (1-n)b \neq 0$, $\rho(\mathsf{A}) = n-1$;
- ◇ si $a \notin \{b,\ (1-n)b\}$, $\rho(\mathsf{A}) = n$.

Présence d'une conclusion cohérente avec la discussion qui précède : 1 pt

TOTAL QII : 14 PTS

Question III

- La colonne w étant une matrice $n \times 1$, $\mathsf{w}^* = \overline{\mathsf{w}}^{\mathrm{T}}$ est une matrice $1 \times n$. Le produit $\mathsf{w}\mathsf{w}^*$ est donc une matrice $n \times n$. La matrice A possède une ligne de plus que $\mathsf{w}\mathsf{w}^*$ et est donc de dimensions $(n+1) \times n$.

  Dimensions de A : 1 pt

  La matrice $\mathsf{A}^* = \overline{\mathsf{A}}^{\mathrm{T}}$ est de dimensions $n \times (n+1)$. Dès lors, la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ est une matrice carrée d'ordre n.

  Dimensions de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$: 1 pt

- i. L'adjointe de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ est donnée par

  $$(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^* = \mathsf{A}^*(\mathsf{A}^*)^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$$

  La matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ étant égale à son adjointe, elle est hermitienne.

  Valeur de $(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^*$: 1 pt
  Connaissance du concept de matrice hermitienne : 1 pt
  Total i. : 2 pts

  ii. La matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ étant hermitienne, elle est également normale.
  On peut vérifier explicitement que la matrice commute avec son adjointe en écrivant, puisque $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ est hermitienne,

  $$(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^*\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^*\mathsf{A}(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^*$$

  Total ii. : 2 pts (démo. explicite pas nécessaire)

  iii. Commençons par exprimer la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. On a

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^*\mathsf{A} &= \begin{pmatrix} \mathsf{ww}^* \\ \mathsf{w}^* \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathsf{ww}^* \\ \mathsf{w}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathsf{ww}^*)^* & (\mathsf{w}^*)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{ww}^* \\ \mathsf{w}^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathsf{ww}^* & \mathsf{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{ww}^* \\ \mathsf{w}^* \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} n \times n & n \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \times n \\ 1 \times n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

où les dimensions des blocs sont compatibles pour effectuer le produit matriciel, soit

Expression de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ en fonction de w : 2 pts

Mise en évidence du facteur $1 + \mathsf{w}^*\mathsf{w}$: 2 pts

$$
\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{ww}^*\mathsf{ww}^* + \mathsf{ww}^* = \mathsf{w}(\mathsf{w}^*\mathsf{w})\mathsf{w}^* + \mathsf{ww}^* = (1 + \mathsf{w}^*\mathsf{w})\mathsf{ww}^*
$$

puisque $\mathsf{w}^*\mathsf{w}$ est une matrice 1×1, donc un scalaire.
On a

$$
\det(\mathsf{A}^*\mathsf{A}) = \det((\mathsf{w}^*\mathsf{w} + 1)\mathsf{ww}^*) = (\mathsf{w}^*\mathsf{w} + 1)^n \det(\mathsf{ww}^*)
$$

avec

Calcul correct du déterminant de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ avec justifications : 3 pts, dont 1 pt pour l'exposant n lors de la mise en évidence du facteur $(\mathsf{w}^*\mathsf{w} + 1)^n$

$$
\mathsf{ww}^* = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\overline{w}_1 & w_1\overline{w}_2 & \cdots & w_1\overline{w}_n \\ w_2\overline{w}_1 & w_2\overline{w}_2 & \cdots & w_2\overline{w}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ w_n\overline{w}_1 & w_n\overline{w}_2 & \cdots & w_n\overline{w}_n \end{pmatrix}
$$

et donc

$$
\det(\mathsf{ww}^*) = w_1 w_2 \cdots w_n \begin{vmatrix} \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \cdots & \overline{w}_n \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \cdots & \overline{w}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{w}_1 & \overline{w}_2 & \cdots & \overline{w}_n \end{vmatrix} = 0
$$

puisque toutes les lignes sont identiques.
On en conclut que la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ n'est pas inversible puisque son déterminant est nul.

Conclusion correcte : 1 pt

Total iii. : 8 pts

TOTAL QIII : 14 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Les réponses aux questions ne doivent pas se résumer à une suite d'expressions mathématiques. Il est indispensable d'expliquer ce qu'on fait “en français”, en indiquant, sans longueur inutile, la méthode utilisée ou les choix adoptés.

De façon générale, on veillera à ne pas égaler des matrices obtenues par application de transformations élémentaires. Ces transformations élémentaires ne modifient pas certaines propriétés des matrices, comme par exemple le rang, mais produisent des matrices différentes qui ne peuvent être égalées à la matrice de départ.

Question I

- Un examen attentif de la matrice permet d'éviter de longs calculs vu la relation linéaire entre les lignes. Il faut toujours passer un peu de temps à bien lire l'énoncé avant de se lancer tête baissée dans les calculs.
- On rappellera ici utilement les propriétés de l'exponentielle, en particulier,

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2} \neq \mathrm{e}^{z_1 z_2}$$

Question II

Dans tout problème comportant des paramètres, la discussion en fonction des différentes valeurs de ceux-ci ne doit pas être menée de façon arbitraire en considérant des valeurs particulières des paramètres qui semblent donner un comportement différent. Il faut par contre avancer dans la résolution et discuter quand une manipulation ou une conclusion dépend du paramètre, par exemple, quand on est amené à diviser par une expression qui s'annule pour certaines valeurs du paramètre.

Dans tout problème comportant des paramètres, il est également indispensable de terminer sa résolution par une synthèse des différents résultats obtenus en fonction des paramètres.

- La méthode la plus naturelle et systématique pour déterminer le rang d'une matrice de grande taille comportant des paramètres est de réduire celle-ci à une forme normale échelonnée. Pour ce faire, on réalise des opérations élémentaires sur les lignes (et éventuellement les colonnes si nécessaire) de la matrice. Le rang est alors la dimension de la matrice identité que l'on fait apparaître dans le coin supérieur gauche au-dessus de lignes de zéros.

  Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

  ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.
- La notion de rang ne semble pas bien assimilée. Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses lignes (et colonnes) linéairement indépendantes. Le fait que le

déterminant d'une matrice d'ordre n soit nul n'implique donc pas que le rang vaille 0 mais qu'il est inférieur à n et, si toutes les lignes sont identiques, le rang ne vaut pas non plus 0 mais 1.

Question III

i. C'était bien la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ dont il fallait montrer qu'elle était hermitienne, pas la matrice A. Il faut bien lire les énoncés.

iii.
- Il faut évidemment exprimer $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ en fonction de w afin de calculer son déterminant et examiner si elle est inversible. Il est par contre inutile d'exprimer w en fonction de ses composantes à ce stade. Cela ne ferait qu'alourdir les écritures.
- L'étape la plus délicate de l'exercice était de reconnaitre un scalaire en $\mathsf{w}^*\mathsf{w}$. Il faut toujours essayer de repérer les produits matriciels dont le résultat est un scalaire (une matrice d'ordre 1) car ces scalaires, contrairement aux matrices plus grandes, peuvent être déplacés dans les produits.
- Le calcul du déterminant pose de nombreux problèmes. En particulier, on rappellera que le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants de celles-ci mais que, si les matrices ne sont pas carrées, la règle ne s'applique évidemment pas (Le déterminant d'une matrice non carrée n'étant d'ailleurs même pas défini.).

  On n'oubliera pas non plus que, si M est une matrice d'ordre n et λ un scalaire, alors
  $$\det(\lambda\mathsf{M}) = \lambda^n \det\mathsf{M}$$