Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2017

# MATH0013-1/2 - ALGÈBRE

## ÉVALUATION FORMATIVE

*Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.*
*Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e) et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures et demie.*

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du* ***25 octobre****.*

*Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur*
*www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation*

### Question I

Déterminez les conditions sur les paramètres réels $a$ et $b$ pour qu'il existe une fonction unique du type

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

telle que

$$f(1) = 0, \qquad f(2) = a, \qquad f'(1) = 1, \qquad f'(2) = b \qquad \text{et} \qquad f'(3/2) = 0$$

Déterminez l'expression de celle-ci.

### Question II

Soit la matrice réelle

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{b}^T \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{A}$ est une matrice réelle inversible d'ordre $n$ et $\mathsf{b}$ une matrice colonne réelle de $n$ éléments.

i. Déterminez les dimensions de $\mathsf{B}$.
ii. Quelles dimensions doivent avoir $\mathsf{B}_d^{-1}$ et $\mathsf{B}_g^{-1}$ si celles-ci existent ? Justifiez.
iii. Montrez par le calcul que $\mathsf{B}$ n'admet pas d'inverse à droite.
iv. Montrez par le calcul que $\mathsf{B}$ possède une infinité d'inverses à gauche. Donnez-en une.
*Suggestion : pour les points iii. et iv., utilisez la méthode des matrices définies par blocs.*

### Question III

Montrez que l'application

$$\forall \mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{R}_n^m \;:\; (\mathsf{A}, \mathsf{B}) \mapsto (\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \operatorname{trace}(\mathsf{A}^T\mathsf{B})$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n^m$, *i.e.* que la forme $\operatorname{trace}(\mathsf{A}^T\mathsf{B})$ est hermitienne, sesquilinéaire et définie positive.

## Question I

Si

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

on a

$$f'(x) = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2$$

de sorte que les conditions à remplir par la fonction recherchée s'écrivent

*Équations à vérifier : 2 pts*

$$\begin{cases} f(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ f(2) = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 8\delta = a \\ f'(1) = \beta + 2\gamma + 3\delta = 1 \\ f'(2) = \beta + 4\gamma + 12\delta = b \\ f'(3/2) = \beta + 3\gamma + \dfrac{27}{4}\delta = 0 \end{cases}$$

Ce système peut être exprimé sous la forme matricielle

*Écriture du système sous forme matricielle : 1 pt pour le principe (accordé même si erreur venant des équations)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 27/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de tester la compatibilité et de résoudre le système, réduisons à une forme normale échelonnée la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & b \\ 0 & 1 & 3 & 27/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Les transformations $l_2 \to l_2 - l_1$ et $l_5 \to 4l_5$ conduisent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & b \\ 0 & 4 & 12 & 27 & 0 \end{pmatrix}$$

puis les opérations élémentaires $l_3 \to l_3 - l_2$, $l_4 \to l_4 - l_2$ et $l_5 \to l_5 - 4l_2$ mènent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 5 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4a \end{pmatrix}$$

Ensuite, $l_4 \to l_4 + l_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4a \end{pmatrix}$$

et $l_5 \to l_5 + l_4$ permettent d'obtenir la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-6a+b \end{pmatrix}$$

Le système est donc compatible si $1-6a+b=0$, *i.e.* il existe au moins une fonction vérifiant les conditions énoncées si

$$b = 6a - 1$$

*Condition de compatibilité : 2 pts dont 1 pt pour la méthode*

Sous cette condition, en supprimant la dernière ligne qui n'apporte plus rien, la matrice échelonnée s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

Les transformations successives $l_3 \to l_3 + 4l_4$ et $l_3 \to -l_3$ conduisent alors à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-15a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

Via $l_2 \to l_2 - 3l_3 - 7l_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3+18a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-15a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

et $l_1 \to l_1 - l_2 - l_3 - l_4$, on obtient ensuite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2-7a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3+18a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-15a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

Il existe donc une solution unique

*Solution du système : 4 pts*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-7a \\ 3+18a \\ -1-15a \\ 4a \end{pmatrix}$$

et la fonction recherchée s'écrit

*Expression de $f(x)$ : 1 pt*

$$f(x) = -2 - 7a + (3+18a)x - (1+15a)x^2 + 4ax^3$$

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. $\mathsf{A}$ étant de dimensions $n \times n$ et $\mathsf{b}^{\mathrm{T}}$ de dimensions $1 \times n$, la matrice $\mathsf{B}$ est de dimensions $(n+1) \times n$.

*Total i. : 2 pts*

ii. Si $\mathsf{B}$ admet une inverse à droite alors

$$\mathsf{B}\mathsf{B}_d^{-1} = \mathbb{I}$$

Puisque $\mathsf{B}$ est de dimensions $(n+1) \times n$, le produit apparaissant dans le membre de gauche de cette expression ne peut être formé que si $\mathsf{B}_d^{-1}$ possède exactement $n$ lignes. Par ailleurs, puisque le produit est égal à une matrice carrée, il est nécessaire que le nombre de colonnes de $\mathsf{B}_d^{-1}$ soit égal au nombre de lignes de $\mathsf{B}$, soit $(n+1)$. Dès lors $\mathsf{B}_d^{-1}$ doit être de dimensions $n \times (n+1)$.

*Raisonnement/justification : 2 pts*

*Dimensions de $\mathsf{B}_d^{-1}$ :1 pt*

En raisonnant de la même façon sur le produit

$$\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B} = \mathbb{I}$$

*Dimensions de $\mathsf{B}_g^{-1}$ :1 pt*

on montre aisément que $\mathsf{B}_g^{-1}$ doit également être de dimensions $n \times (n+1)$, ce qui permet de former le produit $\mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{B}$ et conduit à une matrice carrée d'ordre $n$.

*Total ii. : 4 pts*

iii. Si la matrice $\mathsf{B}$ admettait une inverse à droite, celle-ci serait de dimensions $n \times (n+1)$ et serait donc de la forme $(\mathsf{X}\ \ \mathsf{y})$ où $\mathsf{X}$ serait une matrice $n \times n$ et $\mathsf{y}$ une matrice $n \times 1$ telles que

*Décomposition par blocs de $\mathsf{B}_d^{-1}$ : 1 pt*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{b}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathsf{X}\ \ \mathsf{y}) = \mathbb{I}_{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \mathsf{AX} & \mathsf{Ay} \\ \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{X} & \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{y} \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{AX}$ est de dimensions $n \times n$, $\mathsf{Ay}$ de dimensions $n \times 1$, $\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{X}$ de dimensions $1 \times n$ et $\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{y}$ est un scalaire.

Ce système est équivalent à

*Système d'équations pour les différents blocs : 2 pts*

$$\begin{cases} \mathsf{AX} = \mathbb{I}_n \\ \mathsf{Ay} = 0 \\ \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{X} = 0 \\ \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{y} = 1 \end{cases}$$

*Résolution et conclusion : 2 pts*

Puisque $\mathsf{A}$ est inversible, la première équation conduit à $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$.
Pré-multipliant la seconde équation par $\mathsf{A}^{-1}$, on obtient $\mathsf{y} = 0$, ce qui est en contradiction avec la quatrième égalité.
Ainsi, $\mathsf{B}$ n'admet pas d'inverse à droite.

*Total ii. : 5 pts*

*Les étudiants qui mentionnent qu'une matrice verticale ne possède pas d'inverse à droite, sans aucun calcul, reçoivent 2 pts sur les 5 pts.*

iv. Une inverse à gauche de $\mathsf{B}$ serait de la forme $(\mathsf{X} \ \ \mathsf{y})$ où $\mathsf{X}$ serait une matrice $n \times n$ et $\mathsf{y}$ une matrice $n \times 1$ telles que

*Décomposition par blocs de $\mathsf{B}_g^{-1}$ : 1 pt*

$$(\mathsf{X} \ \ \mathsf{y}) \begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{b}^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

c'est-à-dire

$$\mathsf{XA} + \mathsf{yb}^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}_n \qquad \text{soit} \qquad \mathsf{XA} = \mathbb{I}_n - \mathsf{yb}^{\mathsf{T}}$$

*Équation liant les différents blocs : 2 pts*

Puisque $\mathsf{A}^{-1}$ existe, il vient

$$\mathsf{X} = (\mathbb{I}_n - \mathsf{yb}^{\mathsf{T}})\mathsf{A}^{-1} \tag{†}$$

On en déduit qu'il existe une infinité d'inverses à gauche puisque, pour toute matrice $\mathsf{y}$, de dimensions $n \times 1$, on peut déterminer par (†) une matrice $\mathsf{X}$ qui fait de $(\mathsf{X} \ \ \mathsf{y})$ une inverse à gauche de $\mathsf{B}$.

*Conclusion : 2 pts*

En particulier si $\mathsf{y} = 0$, alors $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$ et la matrice $(\mathsf{A}^{-1} \ 0)$ est une inverse à gauche de $\mathsf{B}$.

*Exemple d'inverse à gauche correct : 2 pts*

*Total iii. : 7 pts*

TOTAL QII : 18 PTS

## Question III

Vérifions que l'application $(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ qui à $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$ appartenant à $\mathbb{R}_n^m$ associe $\operatorname{trace}(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B})$ possède les trois propriétés d'un produit scalaire, *i.e.* est une forme hermitienne, sesquilinéaire et définie positive.

Notons que, puisqu'on travaille dans un espace vectoriel réel, toutes les expressions manipulées sont réelles et il est inutile d'en considérer le complexe conjugué là où la définition générale le demande.

*Prise en compte du fait qu'on travail dans un espace vectoriel réel : 1 pt*

- La forme est hermitienne, *i.e.* commutative dans cet espace vectoriel réel.
  En effet, la trace d'une matrice vaut la trace de sa transposée donc

  *Connaissance de la notion de forme hermitienne (ou commutative) : 1 pt*

  $$(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \operatorname{trace}(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}) = \operatorname{trace}[(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{B})^{\mathsf{T}}] = \operatorname{trace}(\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}) = (\mathsf{B}|\mathsf{A})$$

  *Démonstration : 2 pts*

- Elle est sesquilinéaire, *i.e.* bilinéaire dans cet espace vectoriel réel.
  En effet, la trace (sommes des éléments de la diagonale principale) d'une combinaison linéaire de matrices vaut la combinaison linéaire des traces des matrices donc

  *Connaissance de la notion de forme sesquilinéaire (ou bilinéaire) : 1 pt*

  $$(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathsf{A}_k | \sum_{l=1}^{q} \mu_l \mathsf{B}_l) = \operatorname{trace}\left[\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathsf{A}_k^{\mathsf{T}}\right)\left(\sum_{l=1}^{q} \mu_l \mathsf{B}_l\right)\right] = \operatorname{trace}\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} \lambda_k \mu_l \ (\mathsf{A}_k^{\mathsf{T}}\mathsf{B}_l)\right]$$

  $$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} \lambda_k \mu_l \operatorname{trace}(\mathsf{A}_k^{\mathsf{T}}\mathsf{B}_l) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} \lambda_k \mu_l \ (\mathsf{A}_k|\mathsf{B}_l)$$

  *Démonstration : 2 pts*

- Enfin, elle définie positive puisque ($\mathsf{A}$ étant de dimensions $m \times n$, $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ est de dimensions $n \times m$ et $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$ est de dimensions $n \times n$.)

  *Connaissance de la notion de forme définie positive : 1 pt*

  $$\operatorname{trace}(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\mathsf{A}^{\mathsf{T}})_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2 \geq 0$$

  l'égalité ayant lieu si et seulement si la matrice $\mathsf{A}$ est nulle, i.e. si tous les $a_{ij}$ sont nuls.

  *Démonstration : 2 pts*

En conclusion l'application $(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ qui à $\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}$ appartenant à $\mathbb{R}_n^m$ associe $\operatorname{trace}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{B})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n^m$.

TOTAL QIII : 10 PTS

## Commentaires et erreurs les plus fréquentes

### Question I

- De bien trop nombreuses erreurs de calcul sont présentes dans les copies. Une relecture attentive permettrait d'éviter ces erreurs.
- Il ne faut pas sauter d'étape dans la résolution. Il fallait ici écrire les 5 équations du système puis traduire celui-ci sous forme matricielle afin de pouvoir appliquer la méthode de résolution basée sur la réduction à une forme normale échelonnée de la matrice $(\mathsf{A}\ \mathsf{b})$. Il est par ailleurs toujours préférable de mener jusqu'au bout cette réduction. S'arrêter en chemin quand la matrice n'est pas encore complètement réduite et revenir aux équations augmente le risque d'erreur.
- Il faut aussi expliquer ce que l'on fait. En particulier, lors de l'échelonnage, il est indispensable d'écrire les manipulations apportées aux lignes de la matrice. À défaut, il est impossible, pour l'étudiant, de relire sa copie et, pour le correcteur, de vérifier les calculs réalisés.
- Le système comportait 5 équations pour 4 inconnues. Quand le système comporte plus d'équations que d'inconnues, il ne faut pas supprimer les équations en trop... Toutes les équations doivent être prises en compte, ce qui mène en général à une condition de compatibilité, ici entre les paramètres $a$ et $b$.
- Il ne faut pas confondre les inconnues du problème ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ dans cet exercice) et les paramètres ($a$ et $b$).
- Il faut répondre à toutes les questions posées. On demandait la condition de compatibilité mais aussi l'expression de la fonction $f(x)$ vérifiant les conditions données.

### Question II

Certaines propriétés des matrices carrées ne sont pas transposables aux matrices de taille quelconque. En particulier, on ne peut pas prendre le déterminant d'une matrice qui n'est pas carrée, on ne parle pas de la matrice des cofacteurs d'une matrice qui n'est pas carrée, une matrice non carrée ne peut pas être singulière, ...

i.

ii.
- Il faut répondre aux questions posées. Il fallait donc donner les dimensions des inverses à gauche **et à droite**. Ce n'est que plus loin dans l'énoncé qu'il apparaît que l'inverse à droite n'existe pas. Il ne faut donc pas en tenir compte ici.
- Il fallait justifier les deux dimensions de chacune des matrices en utilisant, d'une part, le fait que le produit d'une matrice et de son inverse donne une matrice identité (carrée) et, d'autre part, que le produit de deux matrices ne peut s'effectuer que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

iii.
- Il faut bien poser le problème. On ne doit pas montrer que le produit de la matrice et de son inverse à droite (déterminée comment ?) ne donne pas la matrice identité mais qu'il est impossible de trouver une matrice qui, multipliée à gauche par $\mathsf{B}$ donne la matrice identité.
- La méthode des matrices définies par blocs a posé problème. Il faut être particulièrement attentif à la décomposition réalisée. L'éventuelle matrice inverse à droite doit être décomposée en blocs lui donnant la taille déterminée au point ii. et permettant d'effectuer le produit matriciel. Dans ce cadre, il est indispensable d'indiquer les dimensions des blocs de la décomposition.
- Il ne faut pas essayer de retenir des formules pour le calcul de l'inverse par blocs,

ni en inventer. Seul le cas où les blocs sont centrés sur la diagonale principale de la matrice peut être facilement inversé (voir formule (1.79) des notes de cours).

iv. • Il faut justifier convenablement les conclusions données. On ne peut pas déduire de l'équation liant les blocs $\mathsf{X}$ et $\mathsf{y}$ qu'il y a une infinité de solutions en se basant sur le fait qu'il s'agit d'une seule équation pour deux inconnues.
 • Il faut lire les questions jusqu'au bout et répondre à tout ce qui est demandé. Il ne fallait pas oublier de donner ici un exemple d'inverse à gauche.

## Question III

- Beaucoup de démonstrations de résultats faisant intervenir des matrices peuvent être menées en travaillant avec les matrices, sans passer aux composantes. C'était le cas ici où les deux premières propriétés à démontrer (la commutativité et la bilinéarité) pouvaient être démontrées avec les matrices elles-mêmes. Les démonstrations sont beaucoup plus simples à écrire si on procède de la sorte.
- Remarquer dès le départ que l'on travaille dans un espace réel et que les propriétés à démontrer sont simplement la commutativité et la bilinéarité plutôt que le caractère hermitien et la sesquilinéarité) allège aussi la charge de travail.
- Le caractère défini positif du produit scalaire se démontre en regardant le signe du produit scalaire d'un vecteur par lui-même. Il fallait donc montrer ici que

$$\text{trace}\,(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}) \geq 0 \quad \forall \mathsf{A} \neq 0$$

 et pas que

$$\text{trace}\,(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{B}) \geq 0 \quad \forall \mathsf{A},\, \mathsf{B} \neq 0$$