NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2021

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
*Répondez aux différentes questions sur des **feuilles séparées**.*
*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.

Question I

i. Démontrez que le produit matriciel est associatif, *i.e.* que $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$. Quelles doivent être les tailles des matrices A, B et C pour que cette formule s'applique ?

ii. On considère les vecteurs **a** et **b** linéairement indépendants d'un espace vectoriel complexe $\mathbb{E}$.

   (a) Montrez que les vecteurs
   $$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$$
   sont linéairement indépendants.

   (b) Déterminez $\alpha \in \mathbb{C}$ en fonction de $\|\mathbf{a}\|^2$, $\|\mathbf{b}\|^2$ et $(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ pour que les vecteurs
   $$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b})$$
   soient mutuellement orthogonaux.

iii. La matrice des cofacteurs d'une matrice carrée non singulière est-elle inversible ? Justifiez.

iv. Dans le cas où A est anti-hermitienne, montrez que toutes les valeurs propres de A^4 sont réelles et positives ou nulles.

Question II

Déterminez toutes les valeurs de x, y et z vérifiant le système

$$\begin{cases} x+2y+\ z=1 \\ 2x+3y-2z=2 \\ x+\ y-3z=\lambda \\ x+3y+(3+2\lambda)z=1 \end{cases}$$

en discutant en fonction du paramètre réel λ.

Tournez la page.

Question III

Le tenseur de conductivité thermique **K** décrit les propriétés de diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Dans une base orthonormée, les composantes du flux de chaleur **J** et du gradient de température ∇T sont liées par la relation matricielle

$$\mathsf{J} = -\mathsf{K}\nabla T$$

où K désigne les composantes de **K** dans cette base. Dans la base orthonormée particulière $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, on a

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & -1+\alpha & 2\alpha \\ -1+\alpha & 2 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

où $k_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Déterminez toutes les valeurs des paramètres α et k_0 pour lesquelles les valeurs propres du tenseur **K** sont réelles.

ii. Déterminez toutes les valeurs des paramètres α et k_0 pour lesquelles

$$\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T < 0 \qquad \forall \nabla T \neq 0$$

i.e. telles que le flux de chaleur est systématiquement dirigé des zones de température élevée vers celles de température plus basse.

iii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, l'expression de vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle **K** est représenté par une matrice diagonale. Donnez cette matrice.

Question I

i. Afin de former les produits $(\mathsf{AB})\mathsf{C}$ et $\mathsf{A}(\mathsf{BC})$, les tailles des matrices A, B et C doivent être respectivement du type $(m \times n)$, $(n \times p)$ et $(p \times q)$.

Dans ce cas, les matrices $(\mathsf{AB})\mathsf{C}$ et $\mathsf{A}(\mathsf{BC})$ sont toutes deux de dimensions $(m \times q)$.

L'égalité entre les matrices se vérifie en observant que les éléments correspondants sont égaux puisque, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$ et $\forall j \in \{1,2,\ldots,q\}$,

$$\begin{aligned}
\big[(\mathsf{AB})\mathsf{C}\big]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (\mathsf{AB})_{ik} c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (\mathsf{BC})_{\ell j} = \big[\mathsf{A}(\mathsf{BC})\big]_{ij}
\end{aligned}$$

Ceci démontre l'associativité du produit matriciel.

ii. (a) Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs donnés :

$$\lambda_1 \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \lambda_2 \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

soit

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Puisque les vecteurs **a** et **b** sont linéairement indépendants, ceci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ceci montre que les vecteurs donnés sont linéairement indépendants puisque la seule façon d'annuler leur combinaison linéaire est de choisir des coefficients nuls.

(b) Les vecteurs donnés sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \middle| \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b})\right) = 0$$

ou encore

$$\Big((\mathbf{a}+\mathbf{b}) \Big| (\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b})\Big) = 0$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\Big((\mathbf{a}+\mathbf{b}) \Big| (\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b})\Big) &= (\mathbf{a}|\mathbf{a}) + (\mathbf{b}|\mathbf{a}) - \overline{\alpha}(\mathbf{a}|\mathbf{b}) - \overline{\alpha}(\mathbf{b}|\mathbf{b}) \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 + \overline{(\mathbf{a}|\mathbf{b})} - \overline{\alpha}(\mathbf{a}|\mathbf{b}) - \overline{\alpha}\|\mathbf{b}\|^2
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\overline{\alpha} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + \overline{(\mathbf{a}|\mathbf{b})}}{\|\mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a}|\mathbf{b})}$$

et donc

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + (\mathbf{a}|\mathbf{b})}{\|\mathbf{b}\|^2 + \overline{(\mathbf{a}|\mathbf{b})}}$$

pour que les vecteurs donnés soient orthogonaux.

Remarquons que ceci n'est possible que si $\|\mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a}|\mathbf{b}) \neq 0$.

iii. La matrice des cofacteurs d'une matrice carrée non singulière est inversible.

En effet, la matrice A étant non singulière, $\det \mathsf{A} \neq 0$ et la matrice des cofacteurs Δ est reliée à A par la relation

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{\det \mathsf{A}}$$

On a donc

$$\Delta^{\mathrm{T}} = \det \mathsf{A}\ \mathsf{A}^{-1}$$

soit

$$\Delta = \det \mathsf{A}\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

et

$$\det \Delta = (\det \mathsf{A})^n \det\left[\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right] = (\det \mathsf{A})^n \det\left(\mathsf{A}^{-1}\right) = \frac{(\det \mathsf{A})^n}{\det \mathsf{A}} = (\det \mathsf{A})^{n-1} \neq 0$$

iv. La matrice A étant anti-hermitienne, elle possède n vecteurs propres $\{\mathsf{x}_1,\ \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n\}$ linéairement indépendants relatifs à des valeurs propres $\{\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ (éventuellement confondues) purement imaginaires.

La matrice A^4 possède les mêmes vecteurs propres relatifs aux valeurs propres $\{\lambda_1^4,\ \lambda_2^4, \ldots, \lambda_n^4\}$ puisque, si $\mathsf{A}\mathsf{x}_k = \lambda_k \mathsf{x}_k$, alors

$$\mathsf{A}^4\mathsf{x}_k = \mathsf{A}^3(\mathsf{A}\mathsf{x}_k) = \lambda_k \mathsf{A}^3\mathsf{x}_k = \lambda_k \mathsf{A}^2(\mathsf{A}\mathsf{x}_k) = \lambda_k^2 \mathsf{A}^2\mathsf{x}_k = \cdots = \lambda_k^4 \mathsf{x}_k$$

Puisque les valeurs propres λ_k sont purement imaginaires, on a $\lambda_k = i\alpha_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda_k^4 = (i\alpha_k)^4 = \alpha_k^4 \geq 0$$

de sorte que les valeurs propres de A^4 sont bien réelles et positives ou nulles.

Question II

Le système proposé peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ où

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3+2\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$[\mathsf{A}, \mathsf{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & \lambda \\ 1 & 3 & 3+2\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour amener des 0 au niveau de la première colonne, on introduit les opérations élémentaires

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 \to \ell_4 - \ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 2+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

La réduction peut ensuite être poursuivie selon

$$\ell_2 \to -\ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 2+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4 - \ell_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

De la forme des deux dernières lignes de cette matrice, on déduit que le système n'est compatible que si $\lambda = 1$. Dans ce cas, la matrice prend la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le système admet la solution générale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Question III

i. Le tenseur **K** est représenté par une matrice symétrique quels que soient $k_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres d'une telle matrice étant toujours réelles, toutes les valeurs de $k_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ conduisent à des valeurs propres réelles pour le tenseur **K**.

ii. Vu la définition de J et vu que K est symétrique, on a

$$\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T = -\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}^{\mathrm{T}}\nabla T = -\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\nabla T$$

On aura donc $\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T < 0, \forall\, \nabla T \neq 0$, si

$$\nabla T^{\mathrm{T}}\mathsf{K}\nabla T > 0, \quad \forall\, \nabla T \neq 0$$

c'est-à-dire si la matrice K est définie positive.

Appliquons le critère de Sylvester, qui dit qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs, à la matrice symétrique

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & -1+\alpha & 2\alpha \\ -1+\alpha & 2 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Le premier mineur diagonal principal, k_0, est strictement positif.
- Le deuxième mineur diagonal principal vaut

$$k_0^2 \begin{vmatrix} 1 & -1+\alpha \\ -1+\alpha & 2 \end{vmatrix} = k_0^2(2 - (-1+\alpha)^2) = k_0^2(-\alpha^2 + 2\alpha + 1)$$

  Ce trinôme du second degré s'annule pour les valeurs de α données par $1 \pm \sqrt{2}$ et est strictement positif si

$$\alpha \in \left]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right[$$

- Le troisième mineur diagonal principal vaut

$$\begin{aligned} k_0^3 \begin{vmatrix} 1 & -1+\alpha & 2\alpha \\ -1+\alpha & 2 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 4 \end{vmatrix} &= k_0^3\left[8 - 8\alpha^2 - 4(-1+\alpha)^2\right] \\ &= k_0^3(-12\alpha^2 + 8\alpha + 4) = 4k_0^3(-3\alpha^2 + 2\alpha + 1) \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré s'annule pour les valeurs de α données par

$$\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-6}=\frac{1\pm 2}{3}$$

et est strictement positif si $\alpha\in\,]-1/3,1[$.

Les trois mineurs diagonaux principaux sont simultanément strictement positifs si

$$\alpha\in]1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}[\,\cap\,]-1/3,1[\,=\,]-1/3,1[$$

En conclusion, on a $\mathsf{J}^{\mathrm{T}}\nabla T<0,\ \forall\,\nabla T\neq 0$, si et seulement si $\alpha\in\,]-1/3,1[$.

iii. Dans le cas où $\alpha=1$,

$$\mathsf{K}=k_0\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}$$

Cette matrice est représentée par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres.

Recherche des valeurs propres de K.

Elles sont données par celles de la matrice K/k_0 multipliées par k_0. Les valeurs propres de K/k_0 sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\det\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0}-\lambda\mathbb{I}\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)-4(2-\lambda)$$
$$=(2-\lambda)\lambda(\lambda-5)$$

Les valeurs propres de K sont donc simples et égales à

$$0,\ 2k_0,\ 5k_0$$

Recherche des vecteurs propres de K.

Les vecteurs propres de la matrice K sont les mêmes que ceux de la matrice K/k_0.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda=0$ de K/k_0 sont les solutions w_1 non nulles de

$$\frac{\mathsf{K}}{k_0}\mathsf{w}_1=0\qquad\text{soit}\qquad\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

  Échelonnons la matrice en divisant la deuxième ligne par 2 et en soustrayant 2 fois la première ligne à la troisième.

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_1=\gamma_1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad\gamma_1\in\mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda=2k_0$ de K/k_0 sont les solutions w_2 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0}-2\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_2=0\qquad\text{soit}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

  Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\ell_1\to-\ell_1\qquad\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \leftrightarrow \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est ensuite nécessaire d'échanger les colonnes 2 et 3 afin d'amener un élément non nul dans la deuxième colonne. Ceci demande d'échanger les inconnues y et z de sorte que le système à résoudre devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ensuite,

$$\ell_2 \to \ell_2/6 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

et, en échangeant les variables y et z,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 5k_0$ de K/k_0 sont les solutions w_3 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0} - 5\mathbb{I} \right) \mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\begin{matrix} \ell_1 \to -\ell_1/4 \\ \ell_2 \to -\ell_2/3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}_0$$

Comme la matrice K est symétrique, les vecteurs propres de valeurs propres différentes sont orthogonaux. Il suffit donc de normer les vecteurs obtenus ci-dessus pour obtenir une base orthonormée

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3)$$

dans laquelle la matrice K est représentée par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}(0, 2k_0, 5k_0)$$