Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2017

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Le non-respect des consignes ci-dessous sera sanctionné par un retrait de 2 points sur la note globale.

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

(où $\sigma_0 > 0$ est un paramètre connu) représentant dans une base particulière l'application linéaire $\mathcal{A}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J} = \mathcal{A}(\mathbf{E})$.

i. Déterminez la condition que doit vérifier le paramètre réel α pour que A soit à la fois normale et inversible.

ii. Déterminez la condition sur le paramètre α pour que, conformément au second principe de la thermodynamique, la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.

iii. Dans le cas où $\alpha = 4$, déterminez les composantes du champ électrique $\mathbf{E}$ d'intensité $E_0 = ||\mathbf{E}|| > 0$ fixée qui engendre la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ maximale.

Question II

i. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont linéairement indépendants, en est-il de même des vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}+\mathbf{a}$? Justifiez

ii. L'union de deux sous-espaces vectoriels $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ constitue-t-elle un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$? Justifiez.

iii. On considère une matrice A réelle, carrée, d'ordre n et non singulière ainsi que des matrices-colonnes non nulles c et d appartenant à $\mathbb{R}^n$.

(a) Déterminez les dimensions de $\mathsf{c}\mathsf{d}^T$ et de $\mathsf{d}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$.

(b) Déterminez le rang de $\mathsf{c}\mathsf{d}^T$.

(c) Déterminez la valeur du scalaire α telle que, dans le cas où $1+\mathsf{d}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c} \neq 0$, l'inverse de la matrice $\mathsf{B} = \mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^T$ existe et peut être obtenue à partir de l'inverse de A selon

$$\left(\mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^T\right)^{-1} = \mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^T\mathsf{A}^{-1}$$

Question I

i. D'une part, A est une matrice symétrique, donc normale, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'autre part, $\det \mathsf{A} = 2\sigma_0^3(\alpha - 4)$. Puisque $\sigma_0 > 0$, la matrice A est donc inversible si et seulement si $\alpha \neq 4$.

En conclusion, la matrice A est à la fois normale et inversible pour tout $\alpha \neq 4$.

ii. La condition sur la dissipation d'énergie est donnée par

$$(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E}) > 0, \quad \forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

ou encore, matriciellement,

$$\mathsf{E}^T\mathsf{A}\mathsf{E} > 0, \quad \forall \mathsf{E} \neq 0$$

La matrice symétrique A doit donc être définie positive.
Par le critère de Sylvester, ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de A sont strictement positifs, c'est-à-dire si

$$A_1 = \sigma_0 > 0$$

$$A_2 = 2\sigma_0^2 > 0$$

et

$$A_3 = 2(\alpha - 4)\sigma_0^3 > 0$$

Comme $\sigma_0 > 0$, ces conditions conduisent à $\alpha > 4$.

iii. Pour $\alpha = 4$, la matrice s'écrit

$$\mathsf{A} = \sigma_0 \mathsf{A}_0 \qquad \text{où} \qquad \mathsf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La valeur maximale de la forme quadratique $(\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$ pour une norme donnée de $\|\mathbf{E}\|$ est obtenue dans les directions des vecteurs propres correspondant à la plus grande valeur propre de A.
Les valeurs propres de A sont, au facteur σ_0 près, celles de A_0, elles-mêmes solutions de

$$\det(\mathsf{A}_0 - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4]$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda - 5)$$

La matrice A possède donc trois valeurs propres distinctes : 0, $2\sigma_0$ et $5\sigma_0$, la plus grande étant $5\sigma_0$.
Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre $5\sigma_0$ sont les solutions w non nulles du système

$$(\mathsf{A}_0 - 5\mathbb{I})\mathsf{w} = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Divisant la première ligne par -4 et la deuxième par -3, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On continue alors la réduction suivant

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \gamma \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma \neq 0$$

Parmi ces vecteurs, nous retenons le vecteur

$$\mathsf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ou son opposé) dont la norme vaut E_0.

Question II

i. Pour vérifier l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}+\mathbf{a}$, il faut montrer que

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \beta(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \gamma(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La combinaison linéaire à annuler peut s'écrire sous la forme

$$(\alpha+\gamma)\mathbf{a} + (\alpha+\beta)\mathbf{b} + (\beta+\gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont indépendants, ceci n'est possible que si

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases}$$

Les coefficients α, β et γ vérifient donc un système linéaire qui peut s'écrire

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det \mathsf{A} = 2 \neq 0$, la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Les vecteurs considérés sont donc bien linéairement indépendants.

ii. Non, comme le montre l'exemple suivant.
Soit

$$\mathtt{E}_1 = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \mathtt{E}_2 = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$$

On a

$$(1,0) \text{ et } (0,1) \in \mathtt{E}_1 \cup \mathtt{E}_2 \quad \text{mais} \quad (1,0)+(0,1) = (1,1) \notin \mathtt{E}_1 \cup \mathtt{E}_2$$

iii. (a) Puisque c et d sont des matrices-colonnes appartenant à $\mathbb{R}^n$, c est de dimensions $n \times 1$ et d^T est de dimensions $1 \times n$. Le produit $\mathsf{c}\mathsf{d}^\mathrm{T}$ est donc de dimensions $n \times n$.

La matrice A étant d'ordre n, il en va de même de son inverse A^{-1}. L'expression $\mathsf{d}^\mathrm{T}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$, en tant que produit de matrices de dimensions $1 \times n$, $n \times n$ et $n \times 1$ est donc un scalaire.

(b) Il résulte de la définition du produit matriciel que

$$\left(\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = c_i d_j$$

ou, plus explicitement, que

$$\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 & \dots & c_1 d_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n d_1 & \dots & c_n d_n \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes du produit $\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}$ sont des multiples de la même matrice-colonne c. Le rang de la matrice, *i.e.* le nombre de colonnes linéairement indépendantes, est donc au plus égal à un. Le rang de la matrice serait nul si toutes les colonnes étaient identiquement nulles. Ce n'est pas le cas puisque c et d sont non nulles et qu'il existe donc au moins un élément $c_i d_j \neq 0$ dans la matrice considérée. Dès lors, le rang de $\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}$ est égal à 1.

(c) L'inverse de B est la matrice donnée si le scalaire α est tel que

$$\left(\mathsf{A} + \mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\right) = \mathbb{I}$$

Puisque $(\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c})$ est un scalaire, on peut écrire successivement

$$\begin{aligned}
&\left(\mathsf{A} + \mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\right) \\
&\qquad = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} + \mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \left(\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}\right)\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{c}\left(\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right)\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} \\
&\qquad = \mathbb{I} + \mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \left(\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right)\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1} \\
&\qquad = \mathbb{I} + \left[1 + \alpha(1 + \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c})\right]\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}
\end{aligned}$$

Ce produit est égal à la matrice identité, comme souhaité, s'il existe α tel que

$$1 + \alpha\left(1 + \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right) = 0$$

Dans le cas où $1 + \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c} \neq 0$, il suffit donc de considérer

$$\alpha = -\frac{1}{1 + \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}}$$