NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2021

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
*Répondez aux différentes questions sur des **feuilles séparées**.*
*Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.

Question I

i. Démontrez que, quels que soient les vecteurs géométriques **a**, **b** et **c**, on a

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\left[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\right]=\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\right]^2$$

ii. Soit $\mathtt{F}$, l'espace vectoriel des points de coordonnées (x,y) de $\mathbb{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication par un réel.

(a) Quel est le vecteur nul de $\mathtt{F}$?

(b) Quelle est la dimension de $\mathtt{F}$? Justifiez.

(c) Quelles conditions doivent vérifier un point (a,b) et son symétrique par rapport à l'axe OX pour constituer une base de $\mathtt{F}$?

iii. On considère une application linéaire $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel E de dimension n vers lui-même. Dans une base orthonormée de E, $\mathcal{A}$ est décrite par la matrice

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{n-1} & \mathsf{b}\\ \mathsf{b}^* & 1\end{pmatrix}$$

où $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{n-1}$. Répondez aux questions suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction de b.

(a) $\mathcal{A}$ est-elle normale ?

(b) $\mathcal{A}$ est-elle unitaire ?

(c) Calculez $\rho(\mathcal{A})$.

(d) Peut-on définir $\mathcal{A}_g^{-1}$? $\mathcal{A}_d^{-1}$? $\mathcal{A}^{-1}$?

Question II

Déterminez toutes les valeurs réelles de x, y, z et t vérifiant le système

$$\begin{cases}(1+\beta)x+y+z+t=1\\ x+(1+\beta)y+z+t=1\\ x+y+(1+\beta)z+t=1\\ x+y+z+(1+\beta)t=1\end{cases}$$

en discutant en fonction du paramètre réel β.

Tournez la page.

Question III

Dans un solide, le tenseur central d'inertie caractérise la distribution de la masse autour du centre d'inertie C. On considère un solide dont le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_C$ est décrit, dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, par la matrice

$$\mathsf{J}_C = mR^2 \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

où m et R sont des constantes réelles strictement positives désignant la masse du solide et une longueur caractéristique de celui-ci.

La rotation du solide autour de son centre d'inertie est décrite par le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ dont l'orientation indique la direction de l'axe autour duquel s'effectue la rotation et dont la norme donne la vitesse angulaire correspondante. On note w la matrice colonne des composantes de $\boldsymbol{\omega}$ dans la base choisie.

On appelle moment cinétique par rapport à C, le vecteur $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$ dont la matrice colonne des composantes dans la base choisie est donnée par $\mathsf{H}_C = \mathsf{J}_C\,\mathsf{w}$.

i. Sans effectuer aucun calcul, justifiez l'existence de trois directions $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ mutuellement orthogonales telles que $\mathbf{H}_C$ est parallèle à $\boldsymbol{\omega}$ si le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ est orienté selon une de ces directions.

ii. Justifiez pourquoi une expression possible pour le tenseur $\mathbf{J}_C$ dans la base $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ est donnée par la matrice
$$\operatorname{diag}\left(3mR^2, 9mR^2, 9mR^2\right)$$

iii. Déterminez explicitement les vecteurs orthonormés $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$.

iv. Montrez que, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, l'énergie cinétique
$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{J}_C\mathsf{w}$$
est strictement positive, conformément à sa signification physique.

v. Déterminez la(les) direction(s) des vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ correspondant au minimum de l'énergie cinétique sous la contrainte $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$.

Question I

i. Par application de la formule du double produit vectoriel

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$, on a

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) &= \mathbf{c}\Big[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\Big] - \mathbf{b}\Big[\mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\Big] \\ &= \mathbf{c}\Big[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})\Big]\end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'orthogonalité de $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}$.
Dès lors, il vient

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})] &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \Big(\mathbf{c}\Big[\mathbf{b} \cdot [\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}]\Big]\Big) \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}][\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] \\ &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}][\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2 = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})]^2\end{aligned}$$

vu la propriété de permutation circulaire du produit mixte.

ii. (a) Le vecteur nul de $\mathtt{F}$ est le point $(0,0)$ situé à l'origine des axes.

(b) L'espace vectoriel $\mathtt{F}$ est de dimension 2 puisque les points $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathtt{F}$. En effet, d'une part, ils sont linéairement indépendants puisque

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et, d'autre part, ils sont générateurs de $\mathtt{F}$ vu que

$$(x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1) \quad \forall (x,y) \in \mathtt{F}$$

(c) Puisqu'ils sont en nombre égal à la dimension de $\mathtt{F}$, les points (a,b) et $(a,-b)$ forment une base de $\mathtt{F}$ s'ils sont linéairement indépendants. Construisons une combinaison linéaire nulle de ces points :

$$\lambda_1(a,b) + \lambda_2(a,-b) = (\lambda_1 a + \lambda_2 a, \lambda_1 b - \lambda_2 b) = (0,0)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{cases} a\lambda_1 + a\lambda_2 = 0 \\ b\lambda_1 - b\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ou encore, matriciellement,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système homogène admet la solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ uniquement si

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix} = -ab - ab = -2ab = 0$$

Il faut donc que a et b soient différents de 0 pour que les points (a,b) et $(a,-b)$ soient linéairement indépendants et forment une base de $\mathtt{F}$.

iii. (a) $\mathcal{A}$ est normale si A est normale, c'est-à-dire si $\mathsf{AA}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$. On a

$$\mathsf{A}^* = \overline{\mathsf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & \overline{\mathsf{b}} \\ \overline{(\mathsf{b}^*)} & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & \mathsf{b} \\ \mathsf{b}^* & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{A}$$

et donc $\mathsf{AA}^* = \mathsf{AA} = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$.

La matrice A est hermitienne et elle est donc normale ainsi que l'application linéaire $\mathcal{A}$ correspondante.

(b) $\mathcal{A}$ est unitaire si A est unitaire, c'est-à-dire si $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^*$ c'est-à-dire si $\mathsf{AA}^* = \mathbb{I}_n$, soit si

$$\mathsf{AA}^* = \mathsf{AA} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & \mathsf{b} \\ \mathsf{b}^* & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & \mathsf{b} \\ \mathsf{b}^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit par blocs, on obtient

$$\mathsf{AA}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1}\mathbb{I}_{n-1} + \mathsf{bb}^* & \mathbb{I}_{n-1}\mathsf{b} + \mathsf{b}\cdot 1 \\ \mathsf{b}^*\mathbb{I}_{n-1} + 1\cdot\mathsf{b}^* & \mathsf{b}^*\mathsf{b} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} + \mathsf{bb}^* & 2\mathsf{b} \\ 2\mathsf{b}^* & \mathsf{b}^*\mathsf{b} + 1 \end{pmatrix}$$

La condition est donc remplie si et seulement si $\mathsf{b} = 0$.

En conclusion, la matrice A n'est unitaire que si $\mathsf{b} = 0$. Il en est de même pour l'application linéaire $\mathcal{A}$ correspondante.

(c) On a $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathsf{A})$. Vu la forme de A dans laquelle on trouve $\mathbb{I}_{n-1}$, on sait déjà que $\rho(\mathsf{A}) \geq n-1$. Pour en savoir plus, réduisons

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & b_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & b_{n-1} \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \overline{b}_3 & \cdots & \overline{b}_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

à une forme normale échelonnée.

En remplaçant ℓ_n par $\ell_n - \overline{b}_1\ell_1 - \overline{b}_2\ell_2 - \ldots - \overline{b}_{n-1}\ell_{n-1}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & b_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} a'_{nn} &= 1 - \overline{b}_1 b_1 - \overline{b}_2 b_2 - \ldots - \overline{b}_{n-1} b_{n-1} \\ &= 1 - |b_1|^2 - |b_2|^2 - \ldots - |b_{n-1}|^2 = 1 - \mathsf{b}^*\mathsf{b} = 1 - \|\mathsf{b}\|^2 \end{aligned}$$

On aura donc $\rho(\mathsf{A}) = n-1$ si $a'_{nn} = 0$, c'est-à-dire si $\|\mathsf{b}\| = 1$.

Dans les autres cas, on aura $\rho(\mathsf{A}) = n$. Les conclusions sont les mêmes pour l'application linéaire $\mathcal{A}$ correspondante.

(d) La matrice A est une matrice carrée. Si A_g^{-1} ou A_d^{-1} ou A^{-1} existe, alors $\mathsf{A}_g^{-1} = \mathsf{A}_d^{-1} = \mathsf{A}^{-1}$. Si $\|\mathsf{b}\| = 1$, alors $\rho(\mathsf{A}) = n-1$ et l'inverse n'existe pas. Dans les autres cas, l'inverse existe. Les conclusions sont les mêmes pour l'application linéaire $\mathcal{A}$.

Question II

Le système à résoudre peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ avec

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1+\beta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\beta \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la compatibilité et résoudre le système, on réduit à une forme normale échelonnée la matrice augmentée

$$[\mathsf{A}|\mathsf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1+\beta & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\beta & 1 \end{array}\right)$$

Pour ce faire, commençons par permuter les première et quatrième lignes de la matrice afin d'éviter une discussion d'emblée en fonction de la valeur de β, *i.e.*

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_4 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1+\beta & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pour amener des 0 au niveau de la première colonne, on introduit ensuite les opérations élémentaires

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 \to \ell_4 - (1+\beta)\ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 0 & \beta & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & -\beta & -\beta(\beta+2) & -\beta \end{array}\right) \tag{$\diamondsuit$}$$

Afin de pouvoir diviser la deuxième ligne par β, on écarte temporairement le cas où $\beta = 0$. On obtient alors successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2/\beta \\ \ell_3 \to \ell_3/\beta \\ \ell_4 \to \ell_4/\beta \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1+\beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -(\beta+2) & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4 + \ell_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2+\beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\beta-3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_3 \\ \ell_4 \to \ell_4 + \ell_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3+\beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta-4 & -1 \end{array}\right) \tag{$\heartsuit$}$$

Afin de pouvoir diviser la quatrième ligne par $-\beta-4$, on écarte temporairement le cas où $\beta = -4$. On obtient alors successivement

$$\ell_4 \to \ell_4/(-\beta-4) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3+\beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & {}^{1}\!/_{(\beta+4)} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - (3+\beta)\ell_4 \\ \ell_2 \to \ell_2 + \ell_4 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \left[{}^{(\beta+3)}\!/_{(\beta+4)}\right] = {}^{1}\!/_{(\beta+4)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & {}^{1}\!/_{(\beta+4)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{(\beta+4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & {}^{1}\!/_{(\beta+4)} \end{array}\right)$$

Dans le cas où $\beta \neq 0$ et $\beta \neq -4$, la solution du système est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta+4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à envisager les deux cas écartés précédemment.

Si $\beta = -4$, la matrice ($\heartsuit$) devient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

et le système est incompatible.

Si $\beta = 0$, la matrice ($\diamondsuit$) devient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et la solution s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Question III

i. Les directions de rotation du solide pour lesquelles le moment cinétique est parallèle au vecteur de Poisson sont telles que (dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$)

$$\mathsf{H}_\mathrm{C} = \lambda \mathsf{w}$$

soit

$$\mathsf{J}_\mathrm{C} \mathsf{w} = \lambda \mathsf{w}$$

Les directions recherchées sont donc celles des vecteurs propres de J_C.

La matrice J_C étant symétrique, elle est également normale. Comme toute matrice normale de dimension 3, elle possède donc 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux qui déterminent 3 directions de rotation du solide $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$, mutuellement orthogonales, pour lesquelles les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{H}_\mathrm{C}$ sont parallèles.

ii. Dans la base $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ constituée par ses vecteurs propres, le tenseur $\mathbf{J}_\mathrm{C}$ est représenté par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres correspondantes. Déterminons donc les valeurs propres de $\mathbf{J}_\mathrm{C}$, qui sont aussi celles de la matrice J_C, afin de vérifier l'accord avec la matrice diagonale donnée.

Les valeurs propres de J_C s'obtiennent en multipliant par mR^2 les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathsf{J}}_\mathrm{C} = \mathsf{J}_\mathrm{C}/mR^2$. Les valeurs propres de $\tilde{\mathsf{J}}_\mathrm{C}$ sont les solutions λ de $\det(\tilde{\mathsf{J}}_\mathrm{C} - \lambda \mathbb{I}) = 0$, c'est-à-dire les solutions de

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Partant du principe que la valeur du déterminant reste inchangée quand on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des autres rangées, le déterminant à calculer s'écrit successivement

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_3 \qquad \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & -9+\lambda \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$c_1 \to c_1 + c_3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -9+\lambda \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la première ligne, on obtient

$$\det(\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}} - \lambda\mathbb{I}) = (\lambda-9)\Big[8-(5-\lambda)(7-\lambda)\Big] = (\lambda-9)(-\lambda^2+12\lambda-27) = -(\lambda-9)^2(\lambda-3)$$

On en déduit que les valeurs propres du tenseur $\mathbf{J}_{\mathrm{C}}$ sont la valeur propre simple $3mR^2$ et la valeur propre double $9mR^2$ et qu'une matrice diagonale représentant ce tenseur est donnée par

$$\mathrm{diag}\left(3mR^2, 9mR^2, 9mR^2\right)$$

iii. Les vecteurs propres de la matrice J_{C} sont les mêmes que ceux de la matrice $\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}}$.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 3$ de $\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}}$ sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}} - 3\mathbb{I})\mathrm{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée

$$\begin{array}{rc} \ell_1 \leftrightarrow -\ell_3 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 5\ell_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \ell_2 \to \ell_2/6 \\ \ell_3 \to \ell_3/12 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De là,

$$\mathrm{w}_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 9$ de $\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}}$ sont les solutions w non nulles de

$$(\tilde{\mathrm{J}}_{\mathrm{C}} - 9\mathbb{I})\mathrm{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\begin{array}{rc} \ell_1 \to -\ell_1 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De là,

$$\mathrm{w} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (\gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } (\gamma_2, \gamma_3) \neq (0,0)$$

Pour construire une base orthonormée, il faut choisir trois vecteurs orthonormés parmi les vecteurs propres identifiés précédemment. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes d'une matrice symétrique sont orthogonaux. Le premier vecteur recherché est donc obtenu en prenant un vecteur unitaire relatif à la valeur propre $3mR^2$, c'est-à-dire un vecteur de composantes

$$\mathsf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sera orthogonal aux vecteurs propres relatifs à l'autre valeur propre.

Il faut ensuite choisir deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $9mR^2$.
Deux vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à la valeur propre $9mR^2$ sont de composantes

$$\mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ils peuvent être orthonormés en appliquant la méthode de Gram-Schmidt, ce qui donne pour le premier

$$\mathsf{E}_2 = \frac{\mathsf{w}_2}{\sqrt{\mathsf{w}_2{}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}_2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le second, on calcule d'abord

$$\mathsf{y}_3 = \mathsf{w}_3 - (\mathsf{E}_2{}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}_3)\, \mathsf{E}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

puis

$$\mathsf{E}_3 = \frac{\mathsf{y}_3}{\sqrt{\mathsf{y}_3{}^{\mathrm{T}}\mathsf{y}_3}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{30}} (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

donnent trois directions orthogonales telles que $\mathbf{H}_C$ est parallèle à $\boldsymbol{\omega}$ si le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ est orienté selon une de ces directions.

iv. L'énergie cinétique

$$T_C = \frac{1}{2} \mathsf{w}^{\mathrm{T}} \mathsf{J}_C \mathsf{w}$$

apparaît (au facteur $1/2$ près) comme la forme quadratique construite sur base de la matrice J_C dont les valeurs propres sont strictement positives. On en déduit que T_C est définie positive, c'est-à-dire

$$T_C = \frac{1}{2} \mathsf{w}^{\mathrm{T}} \mathsf{J}_C \mathsf{w} > 0, \ \forall \mathsf{w} \neq 0$$

v. Le minimum d'une telle forme quadratique pour ($\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} = 1$) étant obtenu dans les directions des vecteurs propres relatifs à la valeur propre minimale, on en déduit que la direction recherchée est celle des vecteurs propres unitaires relatifs à la valeur propre $3mR^2$, soit $\mathbf{E}_1$ (ou $-\mathbf{E}_1$).