Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2019

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez dans le coin supérieur gauche de chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. En repartant de la définition du produit matriciel, montrez que le produit de matrices de tailles compatibles est associatif.

ii. Simplifiez l'expression suivante dans laquelle **a** et **b** désignent des vecteurs unitaires orthogonaux de l'espace physique $\mathcal{E}$,

$$\big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}+\mathbf{b})\big]\wedge\mathbf{a}$$

iii. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ d'un même espace vectoriel $\mathtt{E}$ constitue-t-elle un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$? Justifiez.

iv. On considère une matrice orthogonale A de dimension n, une matrice-colonne $\mathsf{x}\in\mathbb{R}^n$ et la matrice

$$\mathsf{B}=\begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix}$$

(a) Déterminez la pseudo-inverse A^+ de A.

(b) Déterminez les dimensions de B et de sa pseudo-inverse B^+.

(c) On recherche la pseudo-inverse de B sous la forme d'une matrice X construite en portant A^+ dans le bloc supérieur gauche de X.

- Évaluez le produit XB.
- Montrez que la pseudo-inverse de B ne peut être écrite sous la forme de X que si $\mathsf{x}=0$.

Question II

Déterminez toutes les valeurs de a pour lesquelles la matrice

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&0&a&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

possède une inverse et calculez A^{-1} lorsque celle-ci existe.

Tournez la page.

Question III

Résolvez le système ci-dessous pour les inconnues x, y et z en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre réel a :

$$\begin{cases} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=2a \\ x+y+az=a+1 \end{cases}$$

Indiquez les opérations effectuées pour résoudre le système.
Si le système ne possède pas de solution, ne déterminez pas la solution au sens des moindres carrés.

Question IV

Le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire la déformation locale d'un matériau en raison des forces qui lui sont appliquées. Si on considère un élément de matière initialement de longueur ℓ_0 et aligné avec la direction $\mathbf{e}$ (le vecteur $\mathbf{e}$ étant unitaire) avant l'application des forces, sa longueur ℓ dans la configuration déformée produite par l'application des forces est donnée par

$$\ell = \ell_0(1+\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})$$

Dans une base orthonormée particulière ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), on détermine les composantes E du tenseur des déformations sous la forme

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_0 > 0$ est une constante connue et où α est un paramètre réel inaccessible à l'expérience.

i. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles l'élongation est positive ($\ell > \ell_0$) quelle que soit la direction $\mathbf{e}$ considérée. Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, une base orthonormée dans laquelle le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est représenté par une matrice diagonale. Donnez l'expression de cette matrice diagonale.

Question I

i. L'associativité du produit matriciel s'exprime mathématiquement par l'égalité

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}) \tag{†}$$

pour toutes matrices A, B et C telles que les différents produits envisagés sont définis.

La contrainte sur les tailles des matrices conduit à considérer des matrices A, B et C de dimensions respectives $(\ell \times m)$, $(m \times n)$ et $(n \times p)$. Ceci permet de former tous les produits matriciels apparaissant dans (†) et conduit, de part et d'autre de l'égalité, à des matrices de dimensions identiques $(\ell \times p)$.

Au-delà de l'égalité des dimensions des deux membres de (†), l'égalité matricielle demande que les éléments correspondants des matrices soient égaux. C'est effectivement le cas puisque, pour tout $r \in \{1, \cdots, \ell\}$ et $s \in \{1, \cdots, p\}$,

$$\begin{aligned}
[(\mathsf{AB})\mathsf{C}]_{rs} &= \sum_{j=1}^{n} (\mathsf{AB})_{rj}\, \mathsf{C}_{js} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathsf{A}_{ri}\, \mathsf{B}_{ij} \right) \mathsf{C}_{js} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathsf{A}_{ri} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathsf{B}_{ij}\, \mathsf{C}_{js} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathsf{A}_{ri}\, (\mathsf{BC})_{is} \\
&= [\mathsf{A}(\mathsf{BC})]_{rs}
\end{aligned}$$

ii. Le produit vectoriel étant distributif, on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\
&= 2\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}
\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\big[(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}+\mathbf{b})\big] \wedge \mathbf{a} &= \big[2\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\big] \wedge \mathbf{a} \\
&= 2\,\big[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}\big] \\
&= 2\,\mathbf{b}
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété du double produit vectoriel, l'orthogonalité des vecteurs **a** et **b** et le fait que **a** est unitaire.

iii. L'ensemble $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire héritées de $\mathtt{E}$, constitue un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ si cet ensemble est non vide et s'il contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments, *i.e.* si

$$(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2)\,(\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}) : (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \in \mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$$

D'une part, les ensembles $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ contiennent tous deux l'élément nul **0** puisqu'ils constituent des sous-espaces vectoriels de $\mathtt{E}$. Dès lors, $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$ contient **0** et est donc non vide.

D'autre part, tous les vecteurs **x** et **y** appartenant à $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$ appartiennent en particulier à $\mathtt{E}_1$ (resp. $\mathtt{E}_2$) qui, en tant que sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$, contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Dès lors, quels que soient λ et μ dans $\mathbb{C}$,

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathtt{E}_1 \qquad (\text{resp. } \in \mathtt{E}_2)$$

et on a effectivement

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$$

iv. (a) La matrice A étant orthogonale, elle est inversible et d'inverse égale à sa transposée. Comme la pseudo-inverse d'une matrice carrée inversible n'est autre que son inverse, il vient que $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^\mathrm{T}$ dans le cadre des hypothèses proposées.

(b) Si $\mathsf{B} = \begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix}$ avec A de dimensions $n \times n$ et $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors les dimensions de B sont $n \times (n+1)$, de sorte que B^+ est de dimensions $(n+1) \times n$.

(c)
- Si on recherche la pseudo-inverse de B sous la forme d'une matrice X construite en portant A^+ dans le bloc supérieur gauche de X, il découle de ce qui précède que X doit être de la forme

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}^+ \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\end{pmatrix}$$

où $\mathsf{y} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que

$$\mathsf{XB} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}^+ \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}^\mathrm{T} \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix}$$

- Si X est la pseudo-inverse de B, elle doit vérifier les quatre conditions

$$\mathsf{BXB} = \mathsf{B} \qquad (\spadesuit)$$
$$\mathsf{XBX} = \mathsf{X} \qquad (\heartsuit)$$
$$(\mathsf{BX})^* = \mathsf{BX} \qquad (\diamondsuit)$$
$$(\mathsf{XB})^* = \mathsf{XB} \qquad (\clubsuit)$$

où les adjointes peuvent être remplacées par des transposées puisque les matrices considérées ici sont réelles, par hypothèse.
Au vu de ce qui précède et des propriétés des matrices définies par blocs, l'égalité $(\clubsuit)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & \left(\mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{A}\right)^\mathrm{T} \\ \left(\mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x}\right)^\mathrm{T} & \left(\mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{x}\right)^\mathrm{T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix}$$

ou, en calculant les transposées et en égalant les blocs qui se correspondent,

$$\begin{cases}\mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{y} = \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} = \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{A} \\ \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{y} = \mathsf{y}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{cases}$$

La matrice A^T étant inversible, la première des égalités de ce système ne peut être satisfaite que si $\mathsf{y} = \mathsf{x}$ et, s'il en est ainsi, les deux autres égalités sont également satisfaites.
Avec la condition $\mathsf{y} = \mathsf{x}$, le produit XB devient

$$\mathsf{XB} = \begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix}$$

et la condition $\mathsf{B} = \mathsf{BXB}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & \mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} \\ \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\mathsf{A} + \mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{A}\mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{x} + \mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\mathsf{A} + \mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} & \mathsf{x} + \mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

L'égalité requiert $\mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{A} = 0$ et $\mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x} = 0$. En notant que $\mathsf{x}\mathsf{x}^\mathrm{T}\mathsf{x} = ||\mathsf{x}||\mathsf{x}$, on en déduit que les conditions à satisfaire pour que X soit la pseudo-inverse de B ne peuvent l'être que si $\mathsf{x} = 0$, ce qui correspond bien au résultat à démontrer.

Question II

Pour étudier l'existence de l'inverse de A et calculer celle-ci, on considère la matrice augmentée

$$[\mathsf{A},\mathbb{I}] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on procède à l'échelonnage de cette matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

On calcule succesivement

$$(\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis

$$(\ell_4 \to \ell_4 - \ell_2) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ces opérations élémentaires n'ont pas modifié la valeur du déterminant de la première sous-matrice carrée initialement égale à A. À ce stade, cette sous-matrice étant triangulaire supérieure, on peut calculer aisément son déterminant $(= a)$ comme produit des éléments diagonaux. La matrice A est donc non singulière et admet une inverse pour toutes les valeurs non nulles de a.

Pour obtenir l'inverse dans le cas où $a \neq 0$, on poursuit l'échelonnage selon

$$(\ell_3 \to \ell_3/a) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis

$$(\ell_2 \to \ell_2 - \ell_3) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-1/a & -1 & 1 & -1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et

$$\begin{array}{l} (\ell_1 \to \ell_1 - \ell_4) \\ (\ell_2 \to \ell_2 + (1+1/a)\ell_4) \\ (\ell_3 \to \ell_3 - (1/a)\ell_4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & -1/a & -1/a & 1+1/a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/a & 1/a & 1/a & -1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice inverse de A est donc

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 1+\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question III

Le système proposé peut s'écrire sous la forme matricielle $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ où

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Afin de tester la compatibilité de ce système et de le résoudre, réduisons la matrice augmentée $[\mathsf{A}|\mathsf{b}]$ à une forme normale échelonnée.
Partant de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a & a+1 \end{array}\right)$$

une permutation circulaire des lignes conduit à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

et, en remplaçant ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - a\ell_1$, il vient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2-2a^2 \end{array}\right) \tag{$\dagger$}$$

ce qui amène à considérer deux cas.

A) Si $a \neq 1$, on peut poursuivre en divisant ℓ_2 et ℓ_3 par $1-a$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 & 2(1+a) \end{array}\right)$$

et, en soustrayant $(1+a)\ell_2$ à ℓ_3 et $a\ell_2$ à ℓ_1,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & 1+a \end{array}\right) \tag{$\ddagger$}$$

ce qui amène à distinguer deux sous-cas.

A.1) Si $a \neq -2$, on poursuit encore en divisant ℓ_3 par $2+a$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1+a}{2+a} \end{array}\right)$$

Remplaçant ensuite ℓ_2 par $\ell_2 + \ell_3$ et ℓ_1 par $\ell_1 - (1+a)\ell_3$, on obtient finalement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{2+a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{3+2a}{2+a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1+a}{2+a} \end{array}\right)$$

de sorte que le système possède dans ce cas l'unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2+a}\begin{pmatrix} -1 \\ 3+2a \\ 1+a \end{pmatrix}$$

A.2) Si $a = -2$, ($\ddagger$) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

et le système est incompatible.

B) Si $a=1$, (†) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (\dagger)$$

et le système est compatible et indéterminé : ses solutions s'écrivent sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

En conclusion,

i. Si $a=-2$, le système est incompatible et ne possède donc pas de solution.

ii. Si $a=1$, les solutions du système s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

iii. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, le système possède l'unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2+a} \begin{pmatrix} -1 \\ 3+2a \\ 1+a \end{pmatrix}$$

Question IV

i. L'élongation est positive quelle que soit la direction **e** considérée si

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e} > 0 \qquad \forall \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$$

soit, dans la base considérée,

$$\mathsf{e}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{E}\,\mathsf{e} > 0 \qquad \forall \mathsf{e} \neq 0$$

i.e. si E est définie positive.

Par le critère de Sylvester, ceci est le cas si et seulement si

$$\varepsilon_0 \det(\alpha) = \alpha\,\varepsilon_0 > 0, \qquad \varepsilon_0^2 \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \varepsilon_0^2(-2\alpha - 4) > 0$$

et

$$\varepsilon_0^3 \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = -2\varepsilon_0^3\,(\alpha^2 + 4\alpha + 3) > 0$$

Les deux premières conditions étant incompatibles, on en déduit qu'il n'existe aucune valeur de α permettant de rencontrer la condition demandée.

ii. Dans la cas $\alpha = 1$, on a

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des déformations **E** est représenté par une matrice diagonale dans une base orthonormée formée des vecteurs propres de E.

Déterminons les valeurs propres de E. Au facteur ε_0 près, elles sont égales aux valeurs propres de $(1/\varepsilon_0)\mathsf{E}$, soit aux zéros de

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

Les valeurs propres de E sont donc $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$ (de multiplicité 2) et $\lambda_2 = -4\varepsilon_0$ (de multiplicité 1).

Cherchons les vecteurs propres relatifs à $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$. Ce sont les solutions non nulles de $(\mathsf{E} - \lambda_1 \mathbb{I})\mathsf{w} = 0$ soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par des opérations élémentaires, la matrice des coefficients peut être transformée selon

$$(\ell_1 \to -\ell_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} (\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1) \\ (\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc

$$\mathsf{w} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (\beta, \gamma) \neq (0,0)$$

Cherchons les vecteurs propres relatifs à $\lambda_2 = -4\varepsilon_0$. Ceux-ci sont les solutions non nulles de $(\mathsf{E} - \lambda_2 \mathbb{I})\mathsf{w} = 0$ soit

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on échelonne la matrice des coefficients en commençant par permuter les lignes 1 et 3 (pour éviter les divisions) et en changeant le signe de la première ligne ainsi obtenue ; on part donc de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Il vient ensuite successivement

$$\begin{matrix} (\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1) \\ (\ell_3 \to \ell_3 - 5\ell_1) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$(\ell_2 \to \ell_2/6) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2) \\ (\ell_3 \to \ell_3 - 12\ell_2) \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc

$$\mathsf{w} = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \delta \neq 0$$

Pour construire une base orthonormée formée de vecteurs propres de E, il faut prendre 3 vecteurs orthonormés parmi ceux identifiés ci-dessus. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes étant orthogonaux, puisque E est symétrique, il suffit d'identifier deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $2\varepsilon_0$ et de compléter la base avec un vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre $-4\varepsilon_0$.

Les vecteurs propres relatifs à $\lambda_1 = 2\varepsilon_0$ et de composantes

$$\mathsf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

peuvent être orthonormés en utilisant la méthode Gram-Schmidt. On calcule successivement

$$\mathsf{w}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis, pour le second vecteur,

$$\mathsf{w}_2 - (\mathsf{w}_1'^{\mathrm{T}} \mathsf{w}_2)\, \mathsf{w}_1' = \mathsf{w}_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\, \mathsf{w}_1' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et, en divisant par la norme,

$$\mathsf{w}_2' = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour le troisième vecteur de base, on obtient directement

$$\mathsf{w}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{w}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{30}}\,(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{w}_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{cases}$$

constituent une base orthonormée dans laquelle le tenseur est représenté par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon_0 \end{pmatrix}$$