NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2021

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur cet énoncé votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'énoncé avec vos copies.

Question I

Soit un espace vectoriel réel $\mathtt{E}$, une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathtt{E}$, les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ de $\mathtt{E}$ et l'application linéaire

$$\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{E},\ \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2$$

i. Dans le cas où

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

(a) Déterminez la dimension de l'enveloppe linéaire $\mathtt{F}$ des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ et les relations linéaires éventuelles existant entre ceux-ci.

(b) Définissez et déterminez $\mathtt{F}^\perp$.

(c) Déterminez les composantes A de $\mathcal{A}$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

(d) Définissez et déterminez $\rho(\mathcal{A})$.

(e) Définissez et déterminez $\ker(\mathcal{A})$.

ii. Dans le cas où $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ sont des vecteurs quelconques de $\mathtt{E}$, montrez qu'il est nécessaire que les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ soient linéairement indépendants pour que $\mathcal{A}^{-1}$ existe.

Question II

Déterminez toutes les valeurs de x, y et z vérifiant le système linéaire

$$\begin{cases} 2\beta x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + \beta y = 2(\beta^2 - 1) \\ 2\beta x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

en discutant en fonction du paramètre réel β.

Tournez la page.

Question III

L'état de contrainte au sein d'un matériau est décrit par le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ tel que la force par unité de surface $\mathbf{t}$ s'exerçant sur une surface de normale unitaire $\mathbf{n}$ tracée au travers du matériau est donnée par

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Au moyen de jauges de contraintes, on mesure plusieurs composantes du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ et on détermine ainsi expérimentalement la forme de la matrice Σ représentant le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ dans une base orthonormée formée des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$. Dans cette base, on a

$$\mathsf{t} = \Sigma \mathsf{n} \qquad \text{avec} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5\sigma_0 & -\tau & \sigma_0 \\ -\tau & 5\sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 5\sigma_0 \end{pmatrix}$$

où $\sigma_0 > 0$ est une constante connue et où τ n'a pas pu être mesuré expérimentalement.

i. Justifiez l'existence, quels que soient τ et σ_0, de trois vecteurs mutuellement orthogonaux $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$ tels que chacune des surfaces possédant une telle normale soit soumise à une force par unité de surface $\mathbf{t}$ parallèle à la normale $\mathbf{n}$ correspondante.

ii. Déterminez la(les) condition(s) sur le paramètre τ pour que la composante normale $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$ des forces s'exerçant sur une surface quelconque soit strictement positive (état de traction).

iii. Si $\tau = \sigma_0$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, une base orthonormée $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ dans laquelle le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est représenté par une matrice diagonale. Déterminez cette matrice ainsi que la matrice de changement de base S permettant de passer de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ à $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

Question I

i. On considère tout d'abord

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

(a) Les relations linéaires éventuelles entre les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ peuvent être mises en évidence en réduisant à une forme échelonnée la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les composantes de ces vecteurs dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. L'application d'opérations élémentaires aux lignes de la matrice conserve en effet les relations linéaires entre les colonnes.

On a successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_2 \to -\ell_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que deux des trois vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ sont linéairement indépendants, *i.e.* que leur enveloppe linéaire $\mathtt{F}$ est de dimension 2, et la relation linéaire

$$\mathbf{a}_3 = 7\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2$$

entre les trois vecteurs proposés.

On peut vérifier cette relation linéaire en remplaçant $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ par leurs expressions en fonction de $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$.

(b) Le complément orthogonal $\mathtt{F}^\perp$ de $\mathtt{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ constitué de tous les vecteurs de $\mathtt{E}$ orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathtt{F}$.

Puisque $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ forment une base de $\mathtt{F}$, il suffit de déterminer les vecteurs $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ de $\mathtt{E}$ tels que

$$\begin{cases} (\mathbf{x}|\mathbf{a}_1) = 0 \\ (\mathbf{x}|\mathbf{a}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

En réduisant à la forme échelonnée la matrice du système homogène

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to -\ell_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Le complément orthogonal de $\mathtt{F}$ est donc décrit par

$$\mathtt{F}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathtt{E} : \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c) La matrice A donnant les composantes de $\mathcal{A}$ dans la base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ est formée en portant colonne par colonne les composantes des images des vecteurs de base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ dans cette base de $\mathtt{E}$.

On calcule aisément

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{e}_1|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{e}_1|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \\ \qquad\quad = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{e}_2|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{e}_2|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 \\ \qquad\quad = -\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{e}_3|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{e}_3|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \\ \qquad\quad = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Dès lors

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(d) Le rang $\rho(\mathcal{A})$ de l'application linéaire $\mathcal{A}$ est la dimension de l'image de $\mathtt{E}$ par $\mathcal{A}$. Il est égal au rang de la matrice A représentant $\mathcal{A}$ dans la base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

Puisque la troisième colonne de A est identique à la première et que les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes (Elles sont non nulles et ne sont pas multiples l'une de l'autre.), il vient

$$\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathsf{A}) = 2$$

(e) Le noyau $\ker(\mathcal{A})$ de l'application linéaire $\mathcal{A}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ formé des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Tous les vecteurs de $\mathtt{F}^\perp$ appartiennent à $\ker(\mathcal{A})$ puisque,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathtt{F}^\perp, \quad (\mathbf{x}|\mathbf{a}_1) = (\mathbf{x}|\mathbf{a}_2) = (\mathbf{x}|\mathbf{a}_3) = 0$$

et

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2 = 0\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_1 + 0\,\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

Par le théorème du rang, on sait que

$$\dim\ker(\mathcal{A}) = \dim\mathtt{E} - \rho(\mathcal{A}) = 3 - 2 = 1$$

qui est également la dimension de $\mathtt{F}^\perp$. Dès lors, il n'existe pas de vecteur appartenant à $\ker\mathcal{A}$ en dehors de $\mathtt{F}^\perp$ et $\ker(\mathcal{A}) = \mathtt{F}^\perp$.

De façon alternative, on peut déterminer les éléments du noyau en recherchant les vecteurs $\mathbf{x} \in \mathtt{E}$ dont les composantes sont telles que

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En réduisant la matrice du système à une forme échelonnée par des opérations élémentaires, on a successivement

$$\ell_1 \to \ell_1/5 \; \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 1 \\ -2 & -7 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 5\ell_1 \end{matrix} \; \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 1 \\ 0 & -37/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to (-5/37)\ell_2 \; \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \ell_1 \to \ell_1 + (1/5)\ell_2 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On identifie donc la solution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

qui est identique à celle trouvée en (b). On a donc $\ker(\mathcal{A}) = \mathtt{F}^\perp$.

ii. Considérons ensuite le cas où $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ sont quelconques et montrons qu'il est nécessaire que ces vecteurs soient linéairement indépendants pour que $\mathcal{A}^{-1}$ existe.

La propriété peut être justifiée par l'absurde.

Puisque

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_3 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{x}|\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_2$$

les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ sont générateurs de $\mathrm{im}\,(\mathcal{A})$. Si ces trois vecteurs n'étaient pas linéairement indépendants, on aurait $\rho(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{im}\,(\mathcal{A})) < 3$. Dès lors, $\mathcal{A}$ ne serait pas inversible.

On en déduit qu'il est nécessaire que les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ soient linéairement indépendants pour que $\mathcal{A}^{-1}$ existe.

Question II

Le système à résoudre peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ avec

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \beta & 0 \\ 2\beta & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2(\beta^2-1) \\ 6 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la compatibilité et résoudre le système, on réduit à une forme normale échelonnée la matrice

$$[\mathsf{A}|\mathsf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\beta & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & \beta & 0 & 2(\beta^2-1) \\ 2\beta & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Pour ce faire, commençons par permuter les première et deuxième lignes de la matrice afin d'éviter une discussion d'emblée en fonction de la valeur de β, *i.e.*

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2\beta & 1 & 1 & 4 \\ 2 & \beta & 0 & 2(\beta^2-1) \\ 2\beta & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Avant de procéder systématiquement, remarquant la similitude entre ces deux lignes, soustrayons la deuxième ligne de la quatrième. On obtient

$$\ell_4 \to \ell_4 - \ell_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2\beta & 1 & 1 & 4 \\ 2 & \beta & 0 & 2(\beta^2-1) \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Pour amener des 0 au niveau de la première colonne, on introduit ensuite les opérations élémentaires

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - 2\beta\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1-2\beta & 1-2\beta & 4(1-2\beta) \\ 0 & \beta-2 & -2 & 2(\beta^2-5) \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad (\diamondsuit)$$

Afin de pouvoir diviser la deuxième ligne par $1-2\beta$, on écarte temporairement le cas où $\beta = 1/2$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \beta-2 & -2 & 2(\beta^2-5) \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

On peut ensuite continuer l'échelonnage en effectuant les opérations successives

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - (\beta-2)\ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4/2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\beta & 2(\beta^2-2\beta-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\ell_4 \leftrightarrow \ell_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 2(\beta^2-2\beta-1) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3 \\ \ell_4 \to \ell_4 + \beta\ell_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta^2-3\beta-2 \end{array}\right)$$

Dès lors, le système n'est compatible que si $2\beta^2 - 3\beta - 2 = 0$, ce qui correspond aux cas où $\beta \in \{-1/2,\ 2\}$.

Dans le cas où $\beta \in \left\{-\frac{1}{2},\ 2\right\}$, la solution générale du système est alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à envisager le cas écarté précédemment où $\beta = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, la matrice ($\diamondsuit$) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Il est possible d'échelonner la matrice en effectuant les opérations suivantes :

$$\ell_3 \to -\frac{2}{3}\ell_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad \ell_2 \leftrightarrow \ell_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \ell_4 \to \ell_4/2 \\ \ell_4 \leftrightarrow \ell_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_3/3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - 4\ell_3/3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte que la solution générale du système dans le cas où $\beta = \frac{1}{2}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Question III

i. Si une force $\mathbf{t}$ est parallèle à la normale $\mathbf{n}$ à la surface, elle s'écrit

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

ou encore, dans la base des $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$,

$$\mathsf{t} = \Sigma \mathsf{n} = \lambda \mathsf{n}$$

Les directions $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_3$ recherchées sont donc des vecteurs propres de la matrice Σ. Cette matrice étant normale (puisque symétrique) quelles que soient les valeurs de τ et σ_0, elle possède toujours 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux.

ii. La composante normale des forces s'exerçant sur une surface quelconque s'écrit

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

ou encore, dans la base des $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$,

$$\mathsf{n}^{\mathsf{T}} \Sigma \mathsf{n}$$

Cette composante est donc strictement positive si et seulement si la matrice symétrique Σ est définie positive. Ce sera le cas si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives ou, selon le critère de Sylvester, si et seulement si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs.

Appliquons le critère de Sylvester. Les conditions correspondantes sont

$$m_1 = 5\sigma_0 > 0 \tag{1}$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 5\sigma_0 & -\tau \\ -\tau & 5\sigma_0 \end{vmatrix} = 25\sigma_0^2 - \tau^2 > 0 \tag{2}$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} 5\sigma_0 & -\tau & \sigma_0 \\ -\tau & 5\sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 5\sigma_0 \end{vmatrix} > 0$$

Partant du principe que la valeur du déterminant reste inchangée quand on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des autres rangées, il est possible de calculer m_3 en effectuant les opérations

$$c_2 \to c_2 + c_1 \qquad \begin{vmatrix} 5\sigma_0 & 5\sigma_0 - \tau & \sigma_0 \\ -\tau & 5\sigma_0 - \tau & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 2\sigma_0 & 5\sigma_0 \end{vmatrix}$$

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \qquad \begin{vmatrix} 5\sigma_0 + \tau & 0 & 0 \\ -\tau & 5\sigma_0 - \tau & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 2\sigma_0 & 5\sigma_0 \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la première ligne, on obtient la condition

$$\begin{aligned} m_3 &= (5\sigma_0 + \tau)(5\sigma_0(5\sigma_0 - \tau) - 2\sigma_0^2) \\ &= (5\sigma_0 + \tau)(-5\sigma_0\tau + 23\sigma_0^2) \\ &= \sigma_0(5\sigma_0 + \tau)(-5\tau + 23\sigma_0) > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

La constante σ_0 étant strictement positive, la condition (1) est toujours remplie.
La condition (2) est remplie pour

$$\tau \in \,]-5\sigma_0,\, 5\sigma_0[$$

Enfin, la condition (3) est remplie pour

$$\tau \in]-5\sigma_0,\, \frac{23}{5}\sigma_0[$$

En conclusion, la condition recherchée est

$$\tau \in \,]-5\sigma_0,\, \frac{23}{5}\sigma_0[$$

iii. Dans le cas où $\tau = \sigma_0$, la matrice Σ s'écrit

$$\Sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est représenté par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice Σ. Pour obtenir une base orthonormée $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, il faut choisir des vecteurs propres qui sont à la fois orthogonaux et normés.

Recherche des valeurs propres de Σ

Les valeurs propres de Σ s'obtiennent en multipliant par σ_0 les valeurs propres de la matrice $\widehat{\Sigma} = \Sigma/\sigma_0$. Les valeurs propres de $\widehat{\Sigma}$ sont les solutions λ de $\det(\widehat{\Sigma} - \lambda\mathbb{I}) = 0$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] + [-(5-\lambda) - 1] + [-1 - (5-\lambda)] \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 24) + (\lambda - 6) + (\lambda - 6) \\ &= (5-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-4) + 2(\lambda-6) \\ &= (\lambda-6)[(5-\lambda)(\lambda-4) + 2] \\ &= (\lambda-6)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) \\ &= -(\lambda-6)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $\widehat{\Sigma}$ possède la valeur propre double 6 et la valeur propre simple 3. Dès lors, la matrice Σ possède la valeur propre double $6\sigma_0$ et la valeur propre simple $3\sigma_0$.

Recherche des vecteurs propres de Σ

Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $\widehat{\Sigma}$.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 3$ de $\widehat{\Sigma}$ sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\widehat{\Sigma} - 3\mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée

$$\begin{aligned} \ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{matrix} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ \ell_2 \to \ell_2/3 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 3\ell_2 \end{matrix} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De là,

$$\mathsf{w}_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 6$ de $\widehat{\Sigma}$ sont les solutions w_2 non nulles de

$$(\widehat{\Sigma} - 6\mathbb{I})\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\ell_1 \to -\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (\gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } (\gamma_2, \gamma_3) \neq (0,0)$$

Pour construire une base orthonormée, il faut choisir trois vecteurs orthonormés parmis les vecteurs propres identifiés précédemment. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes d'une matrice symétrique sont orthogonaux. Il faut donc commencer par choisir deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteur propres relatifs à la valeur propre double $6\sigma_0$. La base est ensuite complétée par un vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre $3\sigma_0$.

Deux vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à la valeur propre $6\sigma_0$ sont de composantes

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs peuvent être orthonormés en appliquant la méthode de Gram-Schmidt. Le premier vecteur est donc

$$\mathsf{e}'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le second vecteur, on calcule d'abord

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_2 - ({\mathsf{e}'_1}^{\mathsf{T}} \mathsf{x}_2)\, \mathsf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur est finalement obtenu en divisant y_2 par sa norme, soit

$$\mathsf{e}'_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le dernier vecteur de la base est directement obtenu en normant le vecteur propre relatif à la valeur propre $3\sigma_0$ et vaut

$$\mathsf{e}'_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_2' = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}_3' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{cases}$$

constituent une base orthonormée dans laquelle le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est représenté par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(6\sigma_0, 6\sigma_0, 3\sigma_0)$$

La matrice de changement de base correspondante est

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$