LIÈGE université

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez dans le coin supérieur gauche de chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. On considère deux éléments a et b de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathsf{a} \neq \mathsf{b}$ et $\|\mathsf{a}\| = \|\mathsf{b}\|$ ainsi que la matrice

$$\mathsf{Q} = \mathbb{I} - 2\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})(\mathsf{b}-\mathsf{a})^T}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^T(\mathsf{b}-\mathsf{a})}$$

(a) Déterminez les dimensions de $(\mathsf{b}-\mathsf{a})^T(\mathsf{b}-\mathsf{a})$ et celles de la matrice Q. Justifiez.

(b) La matrice Q est-elle symétrique ? Justifiez.

(c) La matrice Q est-elle normale ? Justifiez.

(d) Montrez que $(\mathsf{b}-\mathsf{a})^T(\mathsf{b}+\mathsf{a}) = 0$.

(e) Calculez $\mathsf{Q}(\mathsf{b}-\mathsf{a})$ et $\mathsf{Q}(\mathsf{b}+\mathsf{a})$ et déduisez-en les valeurs de Qa et Qb.

ii. Montrez que, si n vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ muni du produit scalaire $(.|.)$ sont mutuellement orthogonaux et non nuls, ils sont linéairement indépendants.

iii. (a) Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ vers un espace vectoriel $\mathtt{F}$. Définissez l'application linéaire adjointe $\mathcal{A}^*$.

(b) En repartant de cette définition, montrez que

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{B}^*$$

Précisez les espaces vectoriels entre lesquels les applications linéaires $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$ dont définies dans cette expression.

iv. Montrez que, si la matrice réelle A de dimensions $m \times n$ est de rang n, alors $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ est symétrique et définie positive.

Question II

Dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ d'un espace vectoriel complexe $\mathtt{E}$, on détermine les composantes

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

de trois vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ de $\mathtt{E}$.

Déterminez une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ et exprimez les vecteurs de cette base en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_4$. Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?

Question III

Résolvez le système ci-dessous pour les variables w, x, y et z en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre réel a :

$$\begin{cases} aw + x + y + az = 1 \\ w + ax + ay + z = a \\ w + x + y + z = 2a \end{cases}$$

Indiquez les opérations effectuées pour résoudre le système.

Question IV

En travaillant dans la base orthonormée particulière $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$, on détermine expérimentalement certaines composantes du tenseur d'inertie $\mathbf{J}$ d'un solide particulier sous la forme

$$\mathsf{J} = m\ell^2 \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & \beta & 1 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

où m désigne la masse du solide et ℓ sa plus grande dimension ($m > 0$ et $\ell > 0$). Cependant, certaines composantes ne peuvent être mesurées et sont exprimées en fonction d'un coefficient réel β inconnu.

Ce tenseur $\mathbf{J}$ caractérise les propriétés d'inertie du solide pour sa rotation autour d'un axe d'orientation quelconque passant par le centre d'inertie. En particulier, le moment d'inertie J_d pour la rotation autour d'un axe de direction $\mathbf{d}$ quelconque ($\|\mathbf{d}\| = 1$) est lié à $\mathbf{J}$ par

$$J_d = \mathsf{d}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{J}\,\mathsf{d}$$

i. Sachant que J_d est strictement positif quelle que soit la direction $\mathbf{d}$ considérée, déterminez toutes les valeurs admissibles pour le paramètre réel β.

ii. Justifiez, quel que soit β, l'existence d'une base orthonormée dans laquelle le tenseur d'inertie $\mathbf{J}$ du solide considéré est représenté par une matrice diagonale.

iii. Dans le cas où $\beta = 2$, déterminez en fonction de $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$, l'expression de vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathbf{J}$ est représenté par une matrice diagonale. Précisez l'expression de $\mathbf{J}$ dans cette base.

Question I

i. (a) Puisque a et b sont des éléments de dimensions $(n \times 1)$, leur différence $(\mathsf{b}-\mathsf{a})$ est de dimension $(n \times 1)$. Dès lors, $(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}$ est de dimensions $(1 \times n)$ et le produit $(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})$ est un scalaire (dimensions 1×1).

Le produit $(\mathsf{b}-\mathsf{a})(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}$ est de dimensions $n \times n$, tout comme Q.

(b) La matrice Q est réelle, par construction, et, en transposant l'expression qui la définit, on obtient (puisque la transposée de la différence de deux matrices est égale à la différence des transposées)

$$\mathsf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbb{I}^{\mathrm{T}} - 2\frac{\left[(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})} = \mathbb{I} - 2\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})} = \mathsf{Q}$$

La matrice Q est donc symétrique.

(c) La matrice Q étant symétrique, elle est normale.

(d) On a successivement

$$(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}+\mathsf{a}) = (\mathsf{b}^{\mathrm{T}}-\mathsf{a}^{\mathrm{T}})(\mathsf{b}+\mathsf{a}) = \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}+\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{a}-\mathsf{a}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}-\mathsf{a}^{\mathrm{T}}\mathsf{a}$$

Or, puisque l'expression $\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{a}$ est un scalaire, elle est égale à sa transposée, soit

$$\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{a} = (\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{a})^{\mathrm{T}} = \mathsf{a}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}$$

Dès lors, il vient

$$(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}+\mathsf{a}) = \mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}-\mathsf{a}^{\mathrm{T}}\mathsf{a} = \|\mathsf{b}\|^2 - \|\mathsf{a}\|^2 = 0$$

en tenant compte de l'hypothèse $\|\mathsf{a}\| = \|\mathsf{b}\|$.

(e) D'une part, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}(\mathsf{b}-\mathsf{a}) &= \left(\mathbb{I} - 2\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})}\right)(\mathsf{b}-\mathsf{a}) \\
&= (\mathsf{b}-\mathsf{a}) - 2(\mathsf{b}-\mathsf{a})\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})} \\
&= (\mathsf{b}-\mathsf{a}) - 2(\mathsf{b}-\mathsf{a}) = \mathsf{a}-\mathsf{b}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}(\mathsf{b}+\mathsf{a}) &= \left(\mathbb{I} - 2\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})}\right)(\mathsf{b}+\mathsf{a}) \\
&= (\mathsf{b}+\mathsf{a}) - 2(\mathsf{b}-\mathsf{a})\frac{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}+\mathsf{a})}{(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}-\mathsf{a})} \\
&= (\mathsf{b}+\mathsf{a})
\end{aligned}$$

en tenant compte du résultat $(\mathsf{b}-\mathsf{a})^{\mathrm{T}}(\mathsf{b}+\mathsf{a})$ établi en d).

En additionnant et en soustrayant membre à membres les résultats

$$\begin{cases} \mathsf{Qb}-\mathsf{Qa} = \mathsf{Q}(\mathsf{b}-\mathsf{a}) = \mathsf{a}-\mathsf{b} \\ \mathsf{Qb}+\mathsf{Qa} = \mathsf{Q}(\mathsf{b}+\mathsf{a}) = \mathsf{b}+\mathsf{a} \end{cases}$$

on obtient

$$\mathsf{Qb} = \mathsf{a} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Qa} = \mathsf{b}$$

ii. Pour démontrer l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ mutuellement orthogonaux, il convient de montrer que

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \tag{$\heartsuit$}$$

implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Or, en multipliant scalairement la relation ($\heartsuit$) par $\mathbf{x}_i$ où $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_i) \\ &= \lambda_1(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_i) + \lambda_2(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_i) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_i) \\ &= \lambda_i\|\mathbf{x}_i\|^2 \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que les vecteurs sont mutuellement orthogonaux, ce qui se traduit par $(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_i) = 0$ si i et j sont distincts. Puisque les vecteurs sont également non nuls, on a $\|\mathbf{x}_i\| \neq 0$. On en déduit que

$$\lambda_i = 0 \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

ce qui démontre que les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendants.

iii. (a) L'application linéaire adjointe $\mathcal{A}^*$ de l'application linéaire $\mathcal{A}$ définie de $\mathtt{E}$ vers $\mathtt{F}$ est l'application linéaire de $\mathtt{F}$ vers $\mathtt{E}$ telle que, $\forall\mathbf{x} \in \mathtt{E}$ et $\forall\mathbf{y} \in \mathtt{F}$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))$$

(b) Si $\mathcal{A}$ est une application linéaire de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{F}$ et $\mathcal{B}$ est une application linéaire de $\mathtt{F}$ dans $\mathtt{G}$, alors $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ est définie de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{G}$ et, par définition, son adjointe est telle que $\forall\mathbf{x} \in \mathtt{E}$ et $\forall\mathbf{y} \in \mathtt{G}$, on a

$$((\mathcal{B}\circ\mathcal{A})(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = \big(\mathbf{x}|(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})^*(\mathbf{y})\big)$$

Or, on calcule successivement, par application de la définition de la composition de deux applications linéaires et de la définition de l'application adjointe,

$$\begin{aligned} ((\mathcal{B}\circ\mathcal{A})(\mathbf{x})|\mathbf{y}) &= (\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))|\mathbf{y}) \\ &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{B}^*(\mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathcal{B}^*(\mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{x}|(\mathcal{A}^*\circ\mathcal{B}^*)(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\circ\mathcal{B}^*$.

iv. On peut aisément vérifier que la matrice $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ est symétrique. En effet, cette matrice est carrée d'ordre n et égale à sa transposée puisque

$$\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$$

Pour montrer le caractère défini positif de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$, on considère la forme quadratique

$$\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = (\mathsf{A}\mathsf{x})^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \|\mathsf{A}\mathsf{x}\|^2 \geq 0$$

Ceci montre que la matrice considérée est, au moins, semi-définie positive.

La forme quadratique n'est égale à zéro que si $\mathsf{A}\mathsf{x} = 0$ soit, notant les colonnes de A sous la forme c_1, c_2, ... c_n, si

$$0 = \mathsf{A}\mathsf{x} = \begin{pmatrix}\mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_2 & \cdots & \mathsf{c}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1\mathsf{c}_1 + x_2\mathsf{c}_2 + \cdots + x_n\mathsf{c}_n$$

Or, puisque $\rho(\mathsf{A}) = n$, les n colonnes de A sont linéairement indépendantes et il ne peut dès lors exister un $\mathsf{x} \neq 0$ tel que $\mathsf{A}\mathsf{x} = 0$.

En conclusion, la matrice $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ est définie positive puisque

$$\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} > 0$$

pour tout $\mathsf{x} \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$.

Question II

Nous pouvons appliquer la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée du sous-espace vectoriel généré par les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ définis par leurs composantes dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathsf{z}_1 = \frac{\mathsf{x}_1}{\|\mathsf{x}_1\|}$$

On calcule aisément

$$\|\mathsf{x}_1\|^2 = \mathsf{x}_1{}^*\mathsf{x}_1 = 0+0+2^2+0 = 4$$

de sorte que le premier vecteur est décrit par

$$\mathsf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on calcule

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_2 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_2)\,\mathsf{z}_1$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

de sorte que

$$\mathsf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\|\mathsf{y}_2\|^2 = (|1|^2+|i|^2+|0|^2+|1|^2) = 3$$

le second vecteur de la base est décrit par

$$\mathsf{z}_2 = \frac{\mathsf{y}_2}{\|\mathsf{y}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, afin d'identifier un troisième vecteur, on considère

$$\mathsf{y}_3 = \mathsf{x}_3 - (\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_3)\,\mathsf{z}_1 - (\mathsf{z}_2{}^*\mathsf{x}_3)\,\mathsf{z}_2$$

où

$$\mathsf{z}_1{}^*\mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} = 0$$

et

$$\mathsf{z}_2{}^*\mathsf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2i+2i+0+2i) = 2\sqrt{3}i$$

On obtient
$$\mathsf{y}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} - (2\sqrt{3}i)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} - 2i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Ce résultat indique que x_3 est une combinaison linéaire de x_1 et x_2.

Les matrices-colonnes z_1 et z_2 obtenues ci-dessus donnent les composantes des vecteurs orthonormés $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ constituant une base du sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ généré par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$. En fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{e}_4$, on a
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4)$$
Le sous-espace vectoriel considéré est de dimension 2.

Question III

Le système à résoudre peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ avec
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2a \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice
$$(\mathsf{A}|\mathsf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Pour ce faire, commençons par remonter la dernière ligne de la matrice en première place pour éviter une discussion d'emblée en fonction de la valeur de a. Par une permutation circulaire des lignes, on obtient
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \\ a & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 & a \end{array}\right)$$
puis remplaçons ℓ_2 par $\ell_2 - a\ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - \ell_1$ pour obtenir le nouveau tableau
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 & 1-2a^2 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 & -a \end{array}\right)$$

Nous pouvons encore, à ce stade, ajouter la deuxième ligne à la troisième pour obtenir la forme plus simple
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 & 1-2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a^2-a+1 \end{array}\right) \tag{$\diamondsuit$}$$
À partir de cette forme, nous pouvons affirmer que le système proposé n'est compatible que si
$$-2a^2 - a + 1 = 0 \qquad \text{soit si} \quad a \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

- Pour $a = -1$, la matrice ($\diamondsuit$) devient
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
puis, en divisant la ligne 2 par 2,
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et, en retirant la nouvelle ligne 2 ainsi obtenue à la ligne 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte que la solution générale du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Pour $a = 1/2$, la matrice ($\diamondsuit$) devient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En multipliant la ligne 2 par 2,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et en retirant la nouvelle ligne 2 ainsi obtenue à la ligne 1, on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte que, pour $a = 1/2$, la solution générale du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Question IV

i. Va sa définition, J_d est strictement positif quelle que soit la direction **d** si et seulement si la matrice

$$\mathsf{J} = m\ell^2 \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & \beta & 1 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

qui représente le tenseur d'inertie **J** dans la base choisie est définie positive. Puisque $m\ell^2$ est strictement positif, ceci revient à demander que la matrice

$$\mathsf{J}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & \beta & 1 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

soit définie positive.

Cette dernière étant symétrique, elle est définie positive si et seulement si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs (critère de Sylvester), ce qui conduit aux conditions

- $4 > 0$, condition trivialement satisfaite ;
- $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \beta \end{vmatrix} = 4\beta - 1 > 0$, soit $\beta > \dfrac{1}{4}$;

- $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & \beta & 1 \\ -1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 4\beta^2 - 2\beta - 2 > 0$, soit $\beta < -\dfrac{1}{2}$ ou $\beta > 1$.

Les conditions étant simultanément satisfaites si et seulement si $\beta > 1$, cette dernière condition est celle sous laquelle J_d est strictement positif quelle que soit la direction $\mathbf{d}$ considérée.

ii. La matrice J est symétrique pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Elle est donc normale et possède une base orthonormée dans laquelle le tenseur $\mathbf{J}$ est représenté par une matrice diagonale.

iii. Pour $\beta = 2$, il vient

$$\mathsf{J} = m\ell^2 \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ recherchés peuvent être obtenus à partir des vecteurs propres de J, lesquels sont également les vecteurs propres de la matrice J' introduite ci-dessus.

Les valeurs propres de J' sont les zéros du déterminant de $\mathsf{J}'-\lambda\mathbb{I}$. Comme

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\ell_2\to\ell_2-\ell_3}{=} & \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
= \quad & (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
\overset{c_3\to c_3+c_3}{=} & (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
= \quad & (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
= \quad & (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = (2-\lambda)\,(\lambda-5)\,(\lambda-1)
\end{aligned}$$

on en déduit que les valeurs propres de J' sont 1, 2 et 5 tandis que les valeurs propres de J sont quant à elles $m\ell^2$, $2m\ell^2$ et $5m\ell^2$.

- Les vecteurs propres de J' relatifs à la valeur propre $\lambda = 1$ sont les solutions non nulles x_1 de

  $$\left(\mathsf{J}'-\mathbb{I}\right)\mathsf{x}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{x}_1 = 0$$

  Nous pouvons résoudre ce système en échelonnant la matrice carrée qui y apparaît.
  Nous obtenons, en permutant les lignes 1 et 2 et en changeant les signes de la nouvelle ligne 1,

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  puis, en remplaçant l_2 par l_2-3l_1 et l_3 par l_3+l_1,

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Il suffit alors de diviser l_2 par 2 puis d'ajouter la nouvelle ligne obtenue à l_1 pour arriver à

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et à la forme générale des vecteurs propres recherchés

  $$\mathsf{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0$$

- En reproduisant le raisonnement ci-dessus, nous pouvons affirmer que les vecteurs propres de J' associés à sa valeur propre $\lambda = 2$ sont les solutions x_2 non nulles de

  $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{x}_2 = 0$$

  et que ce système peut être résolu en échelonnant la matrice carrée qui y apparaît.
  Nous obtenons, en permutant les lignes 1 et 2 et en changeant les signes de la nouvelle ligne 1,

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis, en remplaçant l_2 par $l_2 - 2l_1$ et l_3 par $l_3 + l_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'ajouter la ligne 2 à la 3 puis de changer les signes de cette ligne 2 pour arriver à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et à la forme générale des vecteurs propres recherchés

$$\mathsf{x}_2 = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}_0$$

- De la même façon, les vecteurs propres de J' associés à sa valeur propre $\lambda = 5$ sont les solutions non nulles de

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mathsf{x}_3 = 0$$

et ce système peut être résolu en échelonnant la matrice carrée qui y apparaît.
Nous obtenons, en changeant les signes de la ligne 1 puis en additionnant la nouvelle ligne qui résulte de cette opération aux lignes 2 et 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

puis, en remplaçant l_3 par $l_3 + l_2$ avant de diviser l_2 par -2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de retirer la ligne 2 à la 1 pour arriver à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et à la forme générale des vecteurs propres recherchés

$$\mathsf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

En conclusion, on peut former une base orthonormée en choisissant le tenseur $\mathbf{J}$ est représenté par la matrice diagonale

$$m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée composée des vecteurs

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$$

$$\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$$

et

$$\mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3)$$

obtenus en considérant $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\delta = 1/\sqrt{3}$ et $\gamma = 1/\sqrt{6}$ dans les expressions des vecteurs propres dont les composantes ont été calculées plus haut.