Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2019

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez dans le coin supérieur gauche de chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Résolvez et discutez en fonction du paramètre réel a :

$$\begin{cases} t+ax+y+z=1 \\ t+x+ay+z=0 \\ t+x+y+az=a+1 \end{cases}$$

Indiquez les opérations effectuées pour résoudre le système.

Question II

Soit la matrice

$$\mathsf{S}=\sigma_0\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(où σ_0 est un paramètre réel strictement positif) représentant dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, l'application linéaire $\mathcal{S}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J}=\mathcal{S}(\mathbf{E})$.

i. Déterminez la(les) condition(s) sur le paramètre réel a pour que la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.

ii. Dans le cas où $a=2$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, les directions de l'espace telles qu'un champ électrique $\mathbf{E}$ appliqué dans une telle direction engendre un courant électrique $\mathbf{J}$ parallèle à $\mathbf{E}$.

Question III

Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.

i. Définissez $\ker\mathcal{A}$.

ii. Montrez que, si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants et orthogonaux à chacun des vecteurs de $\ker\mathcal{A}$, alors, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ sont linéairement indépendants.

iii. Définissez l'application linéaire adjointe de $\mathcal{A}$.

iv. Montrez que $\operatorname{im}\mathcal{A}$ et $\ker\mathcal{A}^*$ sont orthogonaux, *i.e.* que tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\operatorname{im}\mathcal{A}$ est orthogonal à tout vecteur $\mathbf{y}$ de $\ker\mathcal{A}^*$.

Question IV

i. Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Déterminez la matrice A^+, pseudo-inverse de A.

iii. De façon générale, si les colonnes d'une matrice réelle B sont orthonormées, que peut-on dire de B^+ ? Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

Le système proposé peut s'écrire sous la forme matricielle $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ avec

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

Afin de tester la compatibilité de ce système et de le résoudre, réduisons la matrice augmentée $[\mathsf{A}|\mathsf{b}]$ à une forme normale échelonnée.

Partant de

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & a+1 \end{array}\right)$$

et remplaçant ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - \ell_1$, il vient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & a \end{array}\right) \tag{†}$$

ce qui amène à considérer deux cas.

A) Si $a \neq 1$, on peut diviser ℓ_2 et ℓ_3 par $1-a$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dfrac{-1}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dfrac{a}{1-a} \end{array}\right)$$

et, en soustrayant $a\ell_2$ à ℓ_1 et ℓ_2 à ℓ_3,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1+a & 1 & \dfrac{1}{1-a} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dfrac{-1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1+a}{1-a} \end{array}\right)$$

Remplaçant ensuite ℓ_2 par $\ell_2 + \ell_3$ et ℓ_1 par $\ell_1 - (1+a)\ell_3$, on obtient finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+a & \dfrac{-a(a+2)}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dfrac{a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1+a}{1-a} \end{array}\right)$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} -a(a+2) \\ a \\ 1+a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2-a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

B) Si $a = 1$, (†) devient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et le système est incompatible.

En conclusion,

i. Si $a = 1$, le système est incompatible et ne possède donc pas de solution.

ii. Si $a \neq 1$, les solutions du système s'écrivent

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} -a(a+2) \\ a \\ 1+a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2-a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Question II

i. La dissipation d'énergie est donnée par

$$(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{S}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$$

soit, matriciellement en exprimant les composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathcal{S}$ dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,

$$(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = \mathsf{E}^{\mathrm{T}}\mathsf{S}\mathsf{E}$$

Cette forme quadratique est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué si la matrice symétrique S représentant l'application linéaire $\mathcal{S}$ est définie positive.
Par le critère de Sylvester, ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de S sont strictement positifs, c'est-à-dire si

$$3\sigma_0 > 0$$

$$\sigma_0^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = \sigma_0^2(3a-1) > 0$$

et

$$\operatorname{dtm}\mathsf{S} = \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \sigma_0^3(3a^2-2a) > 0$$

Comme $\sigma_0 > 0$, ces conditions conduisent à

$$a > \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad a \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

Ces conditions sont satisfaites simultanément et la dissipation d'énergie est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué pour $a > 2/3$.

ii. Dans le cas où $a = 2$, l'application linéaire $\mathcal{S}$ est représentée par la matrice

$$\mathsf{S} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les directions de l'espace telles qu'un champ électrique $\mathbf{E}$ appliqué dans une telle direction engendre un courant électrique $\mathbf{J}$ parallèle à $\mathbf{E}$ sont telles que

$$\mathbf{J} = \mathcal{S}(\mathbf{E}) = \lambda\mathbf{E}$$

ce qui peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$\mathsf{S}\mathsf{E} = \lambda\mathsf{E}$$

Les directions recherchées sont donc données par les vecteurs propres de S.

- *Recherche des valeurs propres de* S
  Les valeurs propres de S s'obtiennent en multipliant par σ_0 les valeurs propres de S/σ_0. Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\mathsf{S}}{\sigma_0}-\lambda\mathbb{I}\right)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}&=(3-\lambda)(2-\lambda)^2-2(2-\lambda)\\&=(2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2]\\&=(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)\\&=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

  Ainsi, la matrice S possède trois valeurs propres simples : σ_0, $2\sigma_0$ et $4\sigma_0$.

- *Recherche des vecteurs propres de* S
  Ce sont les mêmes que ceux de la matrice S/σ_0.
  - ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre σ_0 sont les solutions w_1 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{S}}{\sigma_0}-\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_1=0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$$

    La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme normale échelonnée par des opérations élémentaires. Permutons les lignes 1 et 3

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

    puis

$$\begin{matrix}\ell_2\to\ell_2+\ell_1\\ \ell_3\to\ell_3-2\ell_1\end{matrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

    enfin

$$\ell_3\to\ell_3+\ell_2\qquad\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

    De là,

$$\mathsf{w}_1=\beta\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad \beta\in\mathbb{R}_0$$

  - ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2\sigma_0$ sont les solutions w_2 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{S}}{\sigma_0}-2\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_2=0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$$

    Échelonnons la matrice de ce système par des opérations élémentaires. On a

$$\begin{matrix}\ell_2\to\ell_2+\ell_1\\ \ell_3\to\ell_3-\ell_1\end{matrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

    puis

$$\ell_2\to-\ell_2\qquad\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

    et enfin

$$\begin{matrix}\ell_1\to\ell_1+\ell_2\\ \ell_3\to\ell_3-\ell_2\end{matrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $4\sigma_0$ sont les solutions w_3 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{S}}{\sigma_0} - 4\mathbb{I}\right) \mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Échelonnons la matrice du système. Permutons d'abord les lignes 1 et 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\ell_2 \to -\frac{\ell_2}{2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \delta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}_0$$

Il suffit de normer les vecteurs propres trouvés pour obtenir les directions cherchées, à savoir

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}'_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Question III

i. L'ensemble $\ker \mathcal{A}$ est le noyau de l'application linéaire $\mathcal{A}$ défini par

$$\ker \mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{E} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

ii. Pour étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$, on considère la relation

$$\lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{a}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{a}_2) + \ldots + \lambda_k \mathcal{A}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$$

Vu la linéarité de l'opérateur $\mathcal{A}$, elle équivaut à

$$\mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in \ker \mathcal{A}$$

Par hypothèse, on a cependant aussi

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in (\ker \mathcal{A})^{\perp}$$

de sorte que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k \in \ker \mathcal{A} \cap (\ker \mathcal{A})^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ étant linéairement indépendants, on en déduit que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

ce qui assure l'indépendance linéaire des vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$.

iii. L'application linéaire adjointe de $\mathcal{A}$ est l'application $\mathcal{A}^*$ de $\mathtt{F}$ dans $\mathtt{E}$ telle que, $\forall \mathbf{x} \in \mathtt{E}$, $\forall \mathbf{y} \in \mathtt{F}$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))$$

iv. Pour tout $\mathbf{x} \in \operatorname{im} \mathcal{A} \subset \mathtt{F}$, il existe un vecteur $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathtt{E}$ tel que $\mathbf{x} = \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})$. Pour tout $\mathbf{y} \in \ker \mathcal{A}^*$, on a dès lors

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= (\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}})|\mathbf{y}) \\
&= (\tilde{\mathbf{x}}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y})) && \text{par définition de l'application adjointe} \\
&= (\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{0}) && \text{puisque } \mathbf{y} \in \ker \mathcal{A}^* \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les espaces vectoriels $\operatorname{im} \mathcal{A}$ et $\ker \mathcal{A}^*$ sont donc mutuellement orthogonaux.

Question IV

i. Afin de construire une décomposition SVD de A, $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^*$, on détermine tout d'abord les valeurs singulières. On forme donc

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

qui admet une valeur propre double $\lambda = 1$. La matrice A possède donc une valeur singulière $s = \sqrt{1} = 1$ de multiplicité 2.

La matrice Σ a les même dimensions que A et s'écrit alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs singuliers correspondant à $s = 1$ sont deux vecteurs propres orthonormés de $\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathbb{I}_2$ que l'ont peut choisir comme étant

$$\mathsf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce choix conduit à la matrice

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

Les vecteurs de sortie u_1 et u_2 correspondant à v_1 et v_2 sont donnés par

$$\mathsf{u}_1 = \frac{\mathsf{A}\mathsf{v}_1}{s_1} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{u}_2 = \frac{\mathsf{A}\mathsf{v}_2}{s_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A étant de dimensions 3×2, la matrice U est de dimensions 3×3 et un troisième vecteur de sortie, unitaire et orthogonal à u_1 et u_2, doit être recherché parmi les vecteurs propres de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ relatifs à la valeur propre nulle ou, de façon équivalente, dans le noyau de $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^\mathrm{T}$. Cette seconde voie peut être exploitée en échelonnant la matrice

$$\mathsf{A}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le simple fait de multiplier la première ligne par $5/3$ conduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et permet d'exprimer la solution générale du système $\mathsf{A}^\mathrm{T}\mathsf{u} = 0$ sous la forme

$$\mathsf{u} = \alpha \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Choisissant un vecteur unitaire parmi ces solutions, on considère

$$\mathsf{u}_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

Ceci complète la définition de la matrice U, soit

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Regroupant les résultats obtenus, on peut écrire une décomposition en valeurs singulières de A sous la forme

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. En exploitant la décomposition de A en valeurs singulières obtenue ci-dessus, il vient

$$\mathsf{A}^+ = \mathsf{V}\,\Sigma^+\mathsf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii. Le résultat particulier $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^\mathsf{T}$ obtenu ci-dessus peut être généralisé à toute matrice B réelle de dimension $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées.

Remarquons d'abord que l'orthogonalité des colonnes $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \dots \mathsf{c}_n$ de B se traduit matriciellement par la relation $\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \mathbb{I}_n$ et exige que $m \geq n$ puisque les colonnes sont alors linéairement indépendantes.

On peut vérifier que B^T satisfait aux conditions qui définissent la pseudo-inverse si les colonnes de B sont orthonormées. On a en effet

$$\begin{cases} \mathsf{B}\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \mathsf{B}\left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}\right) = \mathsf{B}\mathbb{I}_n = \mathsf{B} \\ \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}\mathsf{B}^\mathsf{T} = \left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}\right)\mathsf{B}^\mathsf{T} = \mathbb{I}_n\mathsf{B}^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T} \\ \left(\mathsf{B}\mathsf{B}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}\mathsf{B}^\mathsf{T} = \mathsf{B}\mathsf{B}^\mathsf{T} \\ \left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} \end{cases}$$

De façon alternative, on peut raisonner en s'inspirant des résultats obtenus pour la matrice A.

De $\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \mathbb{I}_n$, on déduit, comme dans le cas particulier ci-dessus, que B possède une seule valeur singulière $s = 1$ de multiplicité n et que la matrice des vecteurs singuliers peut être formée en choisissant $\mathsf{V} = \mathbb{I}_n$.
Puisque $\mathsf{v}_i = \mathsf{e}_i$ et $s_i = 1$ quel que soit $i \leq n$, les vecteurs de sorties $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \dots \mathsf{u}_n$ sont donnés par

$$\mathsf{u}_i = \frac{\mathsf{B}\mathsf{v}_i}{s_i} = \mathsf{B}\mathsf{e}_i = \mathsf{c}_i$$

Dès lors U est de la forme

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C} \end{pmatrix}$$

où C est une matrice de dimensions $m \times (m-n)$.
Regroupant les résultats ci-dessus, il vient comme annoncé

$$\mathsf{B}^+ = \mathsf{V}\,\Sigma^+\mathsf{U}^* = \mathbb{I}_n\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0_{n,m-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{B}^* \\ \mathsf{C}^* \end{pmatrix} = \mathsf{B}^* = \mathsf{B}^\mathsf{T}$$