Janvier 2017

Université de Liège

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$, son aimantation éventuelle peut être décrite par le moment dipolaire magnétique par unité de volume $\mathbf{M}$, communément appelé 'vecteur aimantation'. Si on excepte le cas des matériaux ferromagnétiques qui présentent une aimantation permanente, le vecteur $\mathbf{M}$ est relié à $\mathbf{H}$ par une loi du type $\mathbf{M} = \mathcal{X}(\mathbf{H})$ où $\mathcal{X}$ désigne une application linéaire.

Dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, on détermine les composantes du tenseur $\mathcal{X}$ d'un matériau sous la forme

$$\mathsf{X} = \chi_0 \begin{pmatrix} 4 & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 4+3\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 4 \end{pmatrix}$$

où $\chi_0 > 0$ et α sont des constantes réelles.

i. Déterminez toutes les valeurs de α correspondant à un comportement isotrope, *i.e.* pour lesquelles il existe une constante β telle que $\mathbf{M} = \beta\mathbf{H}$ quel que soit le champ magnétique $\mathbf{H}$. Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez l'expression en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ de vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale. Précisez l'expression de cette matrice diagonale.

Question II

i. Précisez les tailles des matrices A, B et C permettant de former l'expression $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})$, et montrez dans ce cas, en repartant des définitions, que

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$$

ii. Montrez que la matrice $\mathsf{A} = \mathbb{I}_n - 2\dfrac{\mathsf{w}\mathsf{w}^T}{\mathsf{w}^T\mathsf{w}}$ est orthogonale quelle que soit la matrice colonne réelle non nulle $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Montrez que si les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$, $\mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendants et si $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{F}$ est telle que $\rho(\mathcal{A}) = \dim \mathtt{E}$ alors les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2), \ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_n)$ sont linéairement indépendants.

iv. On considère la matrice

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}^T & 0 \end{pmatrix}$$

où A désigne une matrice réelle de dimensions $(m \times n)$ avec $m \neq n$.

(a) Déterminez les dimensions de B.

(b) Montrez que B est singulière.

(c) Montrez que B possède $m+n$ vecteurs propres mutuellement orthogonaux.

(d) Montrez que les vecteurs propres de B peuvent être formés à partir des vecteurs propres de $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ et de $\mathsf{A}\mathsf{A}^T$ et que les valeurs propres λ de B sont telles que λ^2 est valeur propre de $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ ou de $\mathsf{A}\mathsf{A}^T$.

Question I

i. Le matériau présente un comportement isotrope s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{M} = \beta \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{H}$$

c'est-à-dire, puisque $\mathbf{M} = \mathcal{X}(\mathbf{H})$, si

$$\mathcal{X}(\mathbf{H}) = \beta \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{H}$$

ou encore, matriciellement dans la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, si

$$\mathsf{X}\mathsf{H} = \beta \mathsf{H}, \quad \forall \mathsf{H}$$

On peut écrire cette relation sous la forme

$$(\mathsf{X} - \beta \mathbb{I})\mathsf{H} = 0, \quad \forall \mathsf{H}$$

qui n'est vérifiée que si

$$\mathsf{X} = \beta \mathbb{I}$$

Seule la valeur $\alpha = 0$ correspond donc à un tel comportement.

ii. L'application linéaire $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale dans toute base formée de ses vecteurs propres. Il convient donc de rechercher les vecteurs propres de la matrice X qui, dans le cas $\alpha = 1$, s'écrit

$$\mathsf{X} = \chi_0 \mathsf{X}_0 \qquad \text{où} \qquad \mathsf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Les matrices X et X_0 partagent les mêmes vecteurs propres et leurs valeurs propres diffèrent d'un facteur χ_0.

Recherche des valeurs propres de X

Les valeurs propres de X_0 sont les solutions de

$$\det(\mathsf{X}_0 - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant se calcule suivant

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -3+\lambda \\ 2 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \qquad (l_1 \to l_1 - l_3) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3+\lambda \\ 4 & 7-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \qquad (c_1 \to c_1 + c_3) \\
&= (\lambda - 3)[8 - (5-\lambda)(7-\lambda)] \\
&= (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 12\lambda - 27) = -(\lambda-3)^2(\lambda-9)
\end{aligned}$$

La matrice X admet donc la valeur propre double $3\chi_0$ et la valeur propre simple $9\chi_0$.

Vecteurs propres de X *associés à la valeur propre simple* $9\chi_0$

Il s'agit des solutions non nulles de l'équation

$$(\mathsf{X}_0 - 9\mathbb{I})\mathsf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolvons cette équation en échelonnant la matrice des coefficients. Il vient successivement, en commençant par permuter la première et la troisième ligne,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + 5l_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} l_2 \to -l_2/6 \\ l_3 \to l_3/12 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} l_1 \to l_1 - 2l_2 \\ l_3 \to l_3 - l_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que les vecteurs propres de X relatifs à la valeur propre $9\chi_0$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}_0$$

Parmi ces vecteurs, nous retenons le vecteur unitaire de composantes

$$\mathsf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres de X *associés à la valeur propre double* $3\chi_0$

Il s'agit des solutions non nulles de l'équation

$$(\mathsf{X}_0 - 3\mathbb{I})\mathsf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'échelonnage de la matrice des coefficients est immédiat : il suffit de remplacer l_2 par $l_2 - 2l_1$ et l_3 par $l_3 - l_1$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de X relatifs à $3\chi_0$ sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma\, \mathsf{x}^{(2)} + \delta\, \mathsf{x}^{(3)}$$

où

$$\mathsf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et où les coefficients γ et δ désignent deux nombres réels non simultanément nuls.

Pour déterminer une base orthonormée, il convient ensuite d'appliquer la méthode de Gram-Schmidt à $\mathsf{x}^{(2)}$ et $\mathsf{x}^{(3)}$. Il vient tout d'abord

$$\mathsf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathsf{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\mathsf{x}^{(3)} - \left(\mathsf{E}_2{}^{\mathsf{T}}\mathsf{x}^{(3)}\right)\mathsf{E}_2 &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En normant ce vecteur, on obtient

$$\mathsf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

Conclusion

Dans la base orthonormée formée des vecteurs

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\\ \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{30}}(-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

l'application linéaire $\mathcal{X}$ est représentée par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(9\chi_0, 3\chi_0, 3\chi_0)$.

Question II

i. Les opérations matricielles apparaissant dans la relation

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$$

sont bien définies si les dimensions des matrices A, B et C sont respectivement $(m \times n)$, $(n \times p)$ et $(n \times p)$.
Dans ce cas,

$$\begin{aligned}[\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\mathsf{B}+\mathsf{C})_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\\ &= [\mathsf{AB}]_{ij} + [\mathsf{AC}]_{ij}\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation.

ii. La matrice

$$\mathsf{A} = \mathbb{I}_n - 2\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathsf{T}}}{\mathsf{w}^{\mathsf{T}}\mathsf{w}}$$

est orthogonale si elle est réelle et si $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A} = \mathbb{I}$.
D'une part, A est effectivement réelle puisque w est réelle.

D'autre part, on a

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbb{I}_n - 2\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{I}_n - 2\frac{\left(\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} = \mathbb{I}_n - 2\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}}$$

puisque $\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}$ est un scalaire et, en exploitant l'associativité du produit matriciel,

$$\begin{aligned}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A} &= \left(\mathbb{I}_n - 2\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}}\right)\left(\mathbb{I}_n - 2\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}}\right)\\ &= \mathbb{I}_n - 4\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} + 4\frac{(\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}})(\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}})}{(\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w})^2} = \mathbb{I}_n - 4\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} + 4\frac{\mathsf{w}(\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w})\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{(\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w})^2}\\ &= \mathbb{I}_n - 4\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} + 4\frac{\mathsf{w}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}}{\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{w}} = \mathbb{I}_n\end{aligned}$$

Dès lors A est orthogonale.

iii. Les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$,..., $\mathcal{A}(\mathbf{x}_n)$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Cherchons les conditions sous lesquelles

$$\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$$

Par linéarité de $\mathcal{A}$, cette expression peut également s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}\left[\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n\right] = \mathbf{0}$$

Puisque $\rho(\mathcal{A}) = \dim \mathsf{E}$, on sait par le théorème du rang que

$$\dim\ker\mathcal{A} = \dim\mathsf{E} - \rho(\mathcal{A}) = 0$$

Dès lors, $\ker\mathcal{A}$ se réduit au seul vecteur nul et

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ sont linéairement indépendants, il vient

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Dès lors, les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{x}_n)$ sont linéairement indépendants.

iv. (a) La matrice A étant de dimensions $(m\times n)$, A^{T} est de dimensions $(n\times m)$ et les dimensions des blocs apparaissant dans l'expression de B sont telles que

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0_{(m\times m)} & \mathsf{A}_{(m\times n)} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}}_{(n\times m)} & 0_{(n\times n)}\end{pmatrix}$$

La matrice B est donc carrée d'ordre $m+n$.

(b) Si $m > n$, la matrice A possède plus de lignes que de colonnes et $\rho(\mathsf{A}) \leq n < m$. Les lignes de A sont donc linéairement dépendantes. Puisque les m premières lignes de B sont formées à partir des lignes de A en y ajoutant m composantes nulles, les m premières lignes de B sont elles-mêmes linéairement dépendantes et B est singulière.

Si $m < n$, la matrice A possède plus de colonnes que de lignes, $\rho(\mathsf{A}) \leq m < n$ et un raisonnement identique appliqué au n dernières colonnes de B permet de montrer que celles-ci sont linéairement dépendantes. La matrice B est donc également singulière.

(c) La matrice B est une matrice carrée d'ordre $m+n$. Elle est symétrique puisqu'elle est réelle et que

$$\mathsf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & (\mathsf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{B}$$

Dès lors, elle admet $m+n$ vecteurs propres mutuellement orthogonaux.

(d) Exprimons les vecteurs propres x de B sous la forme

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 \\ \mathsf{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{x}_1 \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathsf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$$

qui est compatible avec la partition de B.
Si x est un vecteur propre de B relatif à la valeur propre λ, on a $\mathsf{B}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}$, soit

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 \\ \mathsf{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 \\ \mathsf{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\mathsf{x}_2 = \lambda\mathsf{x}_1 \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1 = \lambda\mathsf{x}_2 \end{cases}$$

Dès lors, prémultipliant la première relation par A^{T}, il vient

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\mathsf{x}_2 = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}(\lambda\mathsf{x}_1) = \lambda(\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1) = \lambda^2\mathsf{x}_2 \tag{1}$$

De même, en prémultipliant la seconde relation par A, on a

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}_1 = \mathsf{A}(\lambda\mathsf{x}_2) = \lambda(\mathsf{A}\mathsf{x}_2) = \lambda^2\mathsf{x}_1 \tag{2}$$

Dès lors, x_1 et x_2 sont, respectivement, des vecteurs propres de $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$ et de $\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}$ relatifs à la valeur propre λ^2 de ces produits matriciels.
Remarquons que la relation (1) (resp. (2)) ne permet d'affirmer que λ^2 est une valeur propre de $\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}$ (resp. de $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$) que si $\mathsf{x}_2 \neq 0$ (resp. $\mathsf{x}_1 \neq 0$). Si x est un vecteur propre de B, alors $\mathsf{x} \neq 0$ de sorte que x_1 et x_2 ne sont pas simultanément nuls. Dès lors, quelle que soit la valeur propre λ et le vecteur propre x de B, λ^2 est toujours une valeur propre de $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$ ou de $\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}$.