LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2019

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez dans le coin supérieur gauche de chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Montrez que, pour toute matrice A carrée et non singulière, $(\mathsf{A}^*)^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^*$.

ii. Soit $\mathbf{a}$ un vecteur libre non nul de l'espace physique $\mathcal{E}$. Caractérisez géométriquement tous les vecteurs $\mathbf{x}$ tels que

$$\left[(\mathbf{x}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{x}\right]\wedge\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

iii. Montrez que toute application linéaire unitaire $\mathcal{A}$ préserve les distances, *i.e.* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathtt{E}$,

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne habituelle.

iv. Montrez que si la matrice A possède une inverse à gauche A_g^{-1} alors la pseudo-inverse A^+ de A est aussi une inverse à gauche de A.

v. Soit une matrice symétrique définie positive A.
   (a) Montrez que tous les éléments diagonaux de A sont strictement positifs.
   (b) Montrez que tous les éléments diagonaux de A sont supérieurs ou égaux à la plus petite des valeurs propres de A.

Question II

On considère les matrices

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{B} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Montrez que B est une inverse à droite de A.

ii. Déterminez toutes les inverses à droite A_d^{-1} de A.

iii. Montrez que les matrices de la forme $\mathsf{A}_d^{-1} - \mathsf{B}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2^3$. Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?

Tournez la page

Question III

On considère les éléments de $\mathbb{C}^4$

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Déterminez une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs x_1, x_2 et x_3.

Question IV

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

ii. La matrice est-elle diagonalisable par une transformation de similitude ? Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Par définition, X est l'inverse de A^* si elle vérifie

$$\mathsf{X}\mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{X} = \mathbb{I} \tag{$\dagger$}$$

Puisque A est carrée et non singulière, elle possède une inverse A^{-1} et on peut former la matrice $\mathsf{X} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^*$. Celle-ci vérifie la condition (†) puisque

$$\begin{cases} \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^* \mathsf{A}^* = \left(\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}\right)^* = \mathbb{I}^* = \mathbb{I} \\ \mathsf{A}^* \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^* = \left(\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}\right)^* = \mathbb{I}^* = \mathbb{I} \end{cases}$$

Dès lors, $\left(\mathsf{A}^*\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^*$.

ii. Les propriétés des produits scalaire et vectoriel définis sur $\mathcal{E}$ permettent de transformer l'équation selon

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \left[(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{x}\right] \wedge \mathbf{a} &= \left[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}\right] \wedge \mathbf{a} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \\ &= -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Cette équation est vérifiée si et seulement si

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

soit (**a** étant supposé non nul) si et seulement si **x** est orthogonal ou parallèle à **a** (ce qui inclut le cas où $\mathbf{x} = 0$).

iii. L'application linéaire $\mathcal{A}$ étant supposée unitaire, elle est inversible et d'inverse égale à son adjointe, de sorte que $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathfrak{I}$.

En exploitant le lien entre la norme euclidienne et le produit scalaire ainsi que la définition de l'adjointe d'une application linéaire, il vient successivement, quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathtt{E}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2 &= (\ \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) \mid \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\ ) \\ &= (\ \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mid \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\ ) \\ &= (\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathcal{A}^* \left[\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\right]\ ) \\ &= (\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \left[\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}\right](\mathbf{x} - \mathbf{y})\ ) \\ &= (\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} - \mathbf{y}\ ) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

iv. Notons d'abord que si A est de dimensions $m \times n$, alors toute inverse à gauche A_g^{-1} et la pseudo-inverse A^+ possèdent les mêmes dimensions $n \times m$.

La pseudo-inverse A^+ de A vérifie, entre autres, la relation

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathsf{A}$$

Si A possède une inverse à gauche A_g^{-1}, il vient, en pré-multipliant cette relation par A_g^{-1},

$$\mathsf{A}_g^{-1}\mathsf{A}\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathsf{A}_g^{-1}\mathsf{A}$$

soit, puisque $\mathsf{A}_g^{-1}\mathsf{A} = \mathbb{I}$,

$$\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathbb{I}$$

ce qui montre que A^+ est une inverse à gauche de A.

v. (a) Le caractère défini positif de la matrice A se traduit par la condition

$$\mathsf{x}^T \mathsf{A} \mathsf{x} > 0, \quad \forall\, \mathsf{x} \neq 0$$

En particulier, si on considère $\mathsf{x} = \mathsf{e}_k$ où e_k désigne la matrice colonne dont tous les éléments sont nuls à l'exception d'un 1 à la ligne k ($k \in \{1, \cdots, n\}$), il vient

$$\mathsf{e}_k{}^T \mathsf{A}\, \mathsf{e}_k = a_{kk} > 0, \qquad k \in \{1, \cdots, n\}$$

(b) Nommons λ_{min} et λ_{max} la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A. La forme quadratique $\mathsf{x}^T \mathsf{A} \mathsf{x}$ est telle que

$$\lambda_{min} \leq \mathsf{x}^T \mathsf{A} \mathsf{x} \leq \lambda_{max}, \quad \forall\, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathsf{x}\| = 1.$$

On obtient le résultat annoncé en exploitant les vecteurs e_k du premier item de cette question (qui sont, par construction, de norme 1) :

$$\lambda_{min} \leq a_{kk} = \mathsf{e}_k{}^T \mathsf{A} \mathsf{e}_k, \qquad k \in \{1, \cdots, n\}$$

Question II

i. On calcule aisément le produit matriciel

$$\mathsf{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

ce qui montre que B est une inverse à droite de A.

ii. Comme A est une matrice de dimensions 2×3, les matrices inverses à droite sont de dimensions 3×2.

Dès lors, recherchons A_d^{-1} de la forme

$$\mathsf{A}_d^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inverse à droite de A si

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si

$$\begin{cases} a & & +2c & & -e & & = 1 \\ & b & & +2d & & -f & = 0 \\ a & & & & +3e & & = 0 \\ & b & & & & +3f & = 1 \end{cases}$$

On peut considérer le système de quatre équations à six inconnues ou remarquer que celui-ci peut être décomposé en deux systèmes découplés de deux équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a + 2c - e = 1 \\ a + 3e = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b + 2d - f = 0 \\ b + 3f = 1 \end{cases}$$

Ces deux systèmes ne différant que par leurs termes indépendants, les opérations élémentaires à effectuer pour échelonner les matrices sont identiques et peuvent être effectuées en parallèle sur les deux seconds membres.

Les deux systèmes sont décrits par

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que l'on peut échelonner par les opérations élémentaires $\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

puis $\ell_2 \to -\ell_2/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

et enfin, $\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Les solutions des deux systèmes sont donc

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit que les matrices inverses à droite sont du type

$$\mathsf{A}_d^{-1} = \begin{pmatrix} -3\lambda & 1-3\mu \\ 1/2+2\lambda & -1/2+2\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

iii. Les matrices $\mathsf{M} = \mathsf{A}_d^{-1} - \mathsf{B}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} -3\lambda & 1-3\mu \\ 1/2+2\lambda & -1/2+2\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,(\lambda+1/4) & -3\mu \\ 2\,(\lambda+1/4) & 2\mu \\ \lambda+1/4 & \mu \end{pmatrix}$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques. Posant $\lambda' = \lambda + 1/4$, il vient donc

$$\mathsf{M} = \lambda' \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda',\, \mu \in \mathbb{R}$$

ce qui montre que l'ensemble des matrices M est un espace vectoriel de dimension 2 puisque chaque matrice M peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de deux matrices linéairement indépendantes.

Question III

Appliquons la procédure d'orthonormation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs (tenant compte du fait que $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$)

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Un premier élément de cette base peut être formé en considérant

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\mathrm{x}_1}{\sqrt{\overline{\mathrm{x}_1}^T \mathrm{x}_1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

puisque

$$\overline{\mathrm{x}_1}^T \mathrm{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

Poursuivant la procédure de Gram-Schmidt, on calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_2 &= \mathrm{x}_2 - (\overline{\mathrm{z}_1}^T \mathrm{x}_2)\mathrm{z}_1 \\
&= \begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix} - \frac{1}{4}(1+i-1-i)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On norme y_2 pour trouver le deuxième vecteur de base, *i.e.*

$$\overline{\mathrm{y}_2}^T \mathrm{y}_2 = \begin{pmatrix}1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix} = 4$$

de sorte que

$$\mathrm{z}_2 = \frac{\mathrm{y}_2}{\sqrt{\overline{\mathrm{y}_2}^T \mathrm{y}_2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_3 &= \mathrm{x}_3 - (\overline{\mathrm{z}_1}^T \mathrm{x}_3)\mathrm{z}_1 - (\overline{\mathrm{z}_2}^T \mathrm{x}_3)\mathrm{z}_2 \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\i\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\i\end{pmatrix} - \frac{1}{4}(1+i)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}(-2)\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-i\\i-1\\1-i\\i-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On norme ensuite y_3 pour trouver le troisième vecteur de base, *i.e.*

$$\overline{\mathrm{y}_3}^T \mathrm{y}_3 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+i & -i-1 & 1+i & -i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\i-1\\1-i\\i-1\end{pmatrix} = \frac{1}{16}(2+2+2+2) = \frac{1}{2}$$

de sorte que

$$\mathrm{z}_3 = \frac{\mathrm{y}_3}{\sqrt{\overline{\mathrm{y}_3}^T \mathrm{y}_3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1-i\\i-1\\1-i\\i-1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$\mathsf{z}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{z}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\\-i\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{z}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1-i\\i-1\\1-i\\i-1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs donnés.

Question IV

i. Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant se calcule suivant

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (l_1 \to l_1 + l_3) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad (c_3 \to c_3 - c_1) \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

La matrice A admet donc la valeur propre double 2 et la valeur propre simple 4.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 2
Ce sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A}-2\mathbb{I})\mathsf{w}=0, \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En divisant la deuxième ligne par -2 et en effectuant une permutation circulaire des lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis successivement, en effectuant les opérations suivantes,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad &\to \quad \begin{matrix} l_2 \to l_2+2l_1 \\ l_3 \to l_3-2l_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \quad \begin{matrix} l_1 \to l_1-l_2 \\ l_3 \to l_3+l_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \quad l_2 \to -l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres relatifs à $\lambda=2$ sont donc donnés par

$$\mathsf{w}=\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma\neq 0$$

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 4
Ce sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A}-4\mathbb{I})\mathsf{w}=0, \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En divisant la deuxième ligne par -2 et en effectuant une permutation circulaire des lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis successivement, en effectuant les opérations suivantes,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad &\to \quad l_2 \to l_2+2l_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\to \quad l_3 \to l_3+l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres relatifs à $\lambda=4$ sont donc donnés par

$$\mathsf{w}=\delta\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta\neq 0$$

ii. Comme la valeur propre double n'admet qu'un seul vecteur propre linéairement indépendant, la matrice A n'est pas diagonalisable par une transformation de similitude puisqu'elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.