LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2018

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Le tenseur d'inertie $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ d'un solide par rapport à un point O permet de calculer le moment d'inertie J_d de ce corps pour la rotation autour d'un axe de direction $\mathbf{d}$ (vecteur unitaire) quelconque passant par O selon $J_d = \mathbf{d} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{O} \cdot \mathbf{d}$.

Dans la base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, le tenseur d'inertie d'un barreau métallique est donné par

$$\mathsf{J}_\mathrm{O} = \frac{mh^2}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(où m et h sont des constantes strictement positives) si on évalue ce tenseur par rapport à un coin O du barreau.

i. Montrez que, conformément à la signification physique, J_d est strictement positif quelle que soit la direction $\mathbf{d}$ considérée.
ii. Sans effectuer aucun calcul, justifiez l'existence d'une base orthonormée $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ dans laquelle $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ est représenté par une matrice diagonale.
iii. Déterminez les moments principaux d'inertie, *i.e.* les éléments non nuls de la matrice diagonale représentant $\mathbf{J}_\mathrm{O}$ dans la base formée par les vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$.
iv. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, la direction $\mathbf{d}$ de l'axe de rotation par rapport auquel le solide présente le plus grand moment d'inertie.

Question II

i. En discutant s'il y a lieu en fonction de $\alpha \in \mathbb{C}$, déterminez les vecteurs propres de

$$\begin{pmatrix} i & \alpha \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ii. Si les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sont linéairement indépendants, en est-il de même des vecteurs

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{m},\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{m},\ \mathbf{a}_3 - \mathbf{m} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{3} \quad ?$$

Justifiez.

iii. Montrez que, si $\mathcal{A}$ est une application linéaire normale d'un espace vectoriel réel E de dimension n vers E lui-même, alors, $\forall \mathbf{x} \in \mathsf{E}$, $\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{A}^*(\mathbf{x})\|$.
iv. Montrez que si λ est une valeur propre de la matrice normale A alors $|\lambda|^2$ est une valeur propre de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.
v. Soit A une matrice réelle normale d'ordre n dont les valeurs propres sont numérotées de telle façon que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Montrez que

$$\max_{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathsf{x}\| = 1} \|\mathsf{A}\mathsf{x}\| = |\lambda_1|$$

Question I

i. Dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, la condition

$$J_d = \mathbf{d}\cdot\mathbf{J}_\mathrm{O}\cdot\mathbf{d} > 0 \quad \forall\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$$

s'écrit matriciellement

$$J_d = \mathsf{d}^\mathrm{T}\mathsf{J}_\mathrm{O}\,\mathsf{d} > 0 \quad \forall\mathsf{d}\neq 0$$

La matrice J_O doit donc être définie positive. Par application du critère de Sylvester à la matrice symétrique J_O, on sait que ce sera le cas si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de J_O sont strictement positifs. Ces mineurs sont

$$\frac{mh^2}{3} > 0, \qquad \left(\frac{mh^2}{6}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9\left(\frac{mh^2}{6}\right)^2 > 0$$

et

$$\left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 9 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 (-1)(-1)^3(63-35) = 28\left(\frac{mh^2}{6}\right)^3 > 0$$

Ces 3 mineurs étant strictement positifs, on en conclut que le moment d'inertie est strictement positif quelle que soit la direction considérée.

ii. La matrice J_O d'ordre 3 étant symétrique, donc normale, elle possède 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux et est diagonalisable dans la base orthonormée correspondante.

iii. Les moments principaux d'inertie recherchés sont les valeurs propres de la matrice J_O.
Les valeurs propres de J_O sont, au facteur $mh^2/6$ près, celles de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

elles-mêmes solutions de

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -7+\lambda & 7-\lambda \end{vmatrix} \qquad c_2 \to c_2 + c_3$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (7-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

La matrice J_O possède donc 3 valeurs propres distinctes qui sont les moments principaux d'inertie du barreau considéré :

$$J_1 = \frac{mh^2}{6}, \quad J_2 = \frac{2mh^2}{3} \quad \text{et} \quad J_3 = \frac{7mh^2}{6}$$

iv. La direction **d** recherchée est celle des vecteurs propres relatifs à la plus grande valeur propre, c'est-à-dire ici à la valeur propre $J_3 = 7mh^2/6$. Il s'agit d'une solution de norme égale à 1 du système

$$\left(\mathsf{J}_O - \frac{7mh^2}{6}\mathbb{I}\right)\mathsf{w} = 0$$

donc de

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Multipliant la matrice par -1 et échangeant les deux premières lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ensuite,

$$\begin{matrix} \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_2 \to \ell_2 - 5\ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis,

$$\ell_2 \to -\ell_2/9 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin,

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système, donnant les composantes des vecteurs propres relatifs à la valeur propre J_3 dans la base des $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0$$

et la direction **d** recherchée vaut $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Question II

i. La matrice

$$\begin{pmatrix} i & \alpha \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

étant triangulaire supérieure, les valeurs propres sont égales aux éléments diagonaux. La matrice considérée possède donc une seule valeur propre $\lambda = i$ de multiplicité deux.
Les vecteurs propres correspondants sont les solutions non nulles de

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha \neq 0$, les vecteurs propres sont

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \beta \neq 0$$

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, la matrice du système est la matrice nulle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs propres de la matrice considérée, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall(\gamma,\delta) \neq (0,0)$$

ii. Les trois vecteurs ne sont pas linéairement indépendants puisqu'on peut former la combinaison linéaire de coefficients non tous nuls

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{m}) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{m}) + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{m}) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) - 3\mathbf{m} = \mathbf{0}$$

iii. Utilisant la définition de l'application linéaire adjointe

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))$$

et tenant compte du fait que $\mathcal{A}$ commute avec son adjointe $\mathcal{A}^*$ puisque l'application est normale, il vient successivement

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) \\
&= (\mathbf{x}|\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}(\mathbf{x})) \\
&= (\mathbf{x}|\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*(\mathbf{x})) \\
&= (\mathcal{A}^*(\mathbf{x})|\mathcal{A}^*(\mathbf{x})) = \|\mathcal{A}^*(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned}$$

Dès lors

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| = \|\mathcal{A}^*(\mathbf{x})\|$$

Le résultat peut également être démontré en remarquant que la norme d'un vecteur peut être calculée en fonction de ses composantes dans une base quelconque et que le résultat est indépendant de la base considérée.

Or, dans toute base orthonormée, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont représentées respectivement par les matrices A et A^* qui commutent l'une avec l'autre et

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}^*(\mathbf{x})\|^2 &= \|\mathsf{A}^*\mathsf{x}\|^2 = (\mathsf{A}^*\mathsf{x})^*(\mathsf{A}^*\mathsf{x}) \\
&= \mathsf{x}^*\mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{x} = \mathsf{x}^*\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{x} \\
&= (\mathsf{A}\mathsf{x})^*(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \|\mathsf{A}\mathsf{x}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned}$$

ce qui démontre également la propriété annoncée.

iv. Puisque A est normale, on sait que

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathsf{A}^*\mathsf{x} = \overline{\lambda}\mathsf{x}$$

Dès lors, si x est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ, il vient successivement

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}^*(\lambda\mathsf{x}) = \lambda(\mathsf{A}^*\mathsf{x}) = \lambda\overline{\lambda}\mathsf{x} = |\lambda|^2\mathsf{x}$$

ce qui démontre que $|\lambda|^2$ est une valeur propre de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ relative au vecteur propre x.

v. On recherche le maximum de l'expression

$$\|\mathsf{A}\mathsf{x}\| = \sqrt{(\mathsf{A}\mathsf{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x}} = \sqrt{\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x}}$$

parmi les vecteurs $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{x} = 1$.

Or, $\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x}$ constitue une forme quadratique construite autour de la matrice $\mathsf{B} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ qui est symétrique puisque

$$\mathsf{B}^\mathsf{T} = \left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \mathsf{B}$$

Le maximum de la forme quadratique $\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x}$ sous la contrainte $\mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{x} = 1$ est égal à la valeur propre la plus grande de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$. En vertu de iv., on sait que celle-ci est égale à $|\lambda_1|^2$ où λ_1 désigne la valeur propre de A qui présente le plus grand module.

Dès lors, comme annoncé,

$$\max_{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathsf{x}\| = 1} \|\mathsf{A}\mathsf{x}\| = \sqrt{|\lambda_1|^2} = |\lambda_1|$$