Opérateurs de dérivation et changements de variables

Il est utile de revoir les **paragraphes 3.11 et 3.12** du cours d'Analyse avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Exercice 1c, §3.14.3

ii. Exercice 8, §3.14.7

iii. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2$$

où f est une fonction inconnue de deux variables x et y, on introduit le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \tag{♠}$$

(a) Étudiez la régularité du changement de variables. En particulier, représentez graphiquement les courbes $\xi = constante$ et $\eta = constante$ dans le plan (x, y) et déterminez des ouverts connexes (d'un seul tenant) Ω et Ω' aussi grands que possible entre lesquels les relations (♠) définissent un changement de variables régulier.

(b) Déterminez l'image des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ par le changement de variables.

(c) Exprimez la forme prise par l'équation différentielle en fonction des variables ξ et η.

(d) Déterminez la forme la plus générale de la solution de l'équation différentielle en fonction des variables x et y.

Remédiation 6 d'Analyse - Réponses succinctes aux questions posées.

i. -

ii. (a) Changement de variables régulier d'ordre infini entre

$$\Omega' = \left\{(r,\theta,\zeta) : r \in]0,+\infty[, \theta \in]0,2\pi[\text{ et } \zeta \in]-\infty,+\infty[\right\}$$

et

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = 0, x \geq 0\}$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

(c)

$$H'(r) + \frac{H(r)}{r} = j(r)$$

iii. (a) Les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\, y > 0\right\}$$

et

$$\Omega' = \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi > 0,\, \eta > 0\right\}$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{\xi\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

(c)

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \xi$$

(d)

$$f(x,y) = x^2 + F(xy).$$

où F désigne une fonction quelconque d'une variable (dérivable sur $]0,+\infty[$).