Formule de Taylor, comportements asymptotiques et fonctions transcendantes.

Il est utile de revoir le **chapitre 1** du cours d'Analyse ainsi que l'**annexe B** sur les fonctions transcendantes avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Si f admet l'asymptote oblique $y = 2x + 1$ en $+\infty$, peut-on en conclure que

$$f \sim 2x, \; (x \to +\infty) \;?$$

Justifiez.

ii. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, peut-on en conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} (f - g) = 0 \;\; ?$$

Justifiez.

iii. Si $f_1 = O(x)$ et $f_2 = O\left(x^2\right)$ au voisinage de 0, peut-on dire que $f_1 + f_2 = O(x), \; (x \to 0)$? Justifiez.

iv. Si $f \in C_2(\mathbb{R})$ avec $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, montrez que

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{\left[\dfrac{df^{-1}}{dy}(y)\right]^2} = \alpha f''[f^{-1}(y)]$$

où α désigne une constante à déterminer.
Vérifiez la relation obtenue en l'appliquant à la fonction $f(x) = \operatorname{sh} x$.

v. Si on tient compte de la tension superficielle, la vitesse de propagation c des ondes à la surface de l'eau est décrite par

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

où λ est la longueur d'onde, g est l'accélération de la pesanteur, σ est la tension superficielle et H est la profondeur.

(a) Déterminez le comportement asymptotique de c pour des grandes longueurs d'onde, *i.e.* pour $\lambda \to +\infty$, et montrez que, en bonne approximation, les ondes de grandes longueurs d'ondes se propagent toutes à la même vitesse (de telles ondes sont dites non dispersives).

(b) Déterminez le comportement asymptotique de c pour des petites longueurs d'onde, *i.e.* pour $\lambda \to 0^+$.

(c) On note c_0 la vitesse de propagation obtenue en négligeant la tension superficielle du fluide, *i.e.* pour $\sigma = 0$. Déterminez α tel que

$$c - c_0 = \alpha\, \sigma + O(\sigma^2), \qquad (\sigma \to 0)$$

vi. Soit une fonction $f \in C_3(\mathbb{R})$ telle que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

où $a_0 \neq 0$. En utilisant la formule de MacLaurin, déterminez l'expression des coefficients b_0, b_1 et b_2 en fonction de a_0, a_1 et a_2 de sorte que

$$\frac{1}{f(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

vii. On essaie de résoudre de façon approchée l'équation

$$\arcsin x = 1 - x$$

en remplaçant $\arcsin x$ par son polynôme de MacLaurin de degré 2, noté $\mathcal{P}_2(x)$.

(a) Montrez que l'unique solution de l'équation proposée est comprise dans l'intervalle $]0,1[$.

(b) Justifiez théoriquement l'application de la formule de MacLaurin à l'ordre 2 à la fonction arcsin. Pour quelles valeurs de x cette formule est-elle applicable ?

(c) Déterminez $\mathcal{P}_2(x)$ et l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.

(d) Soit un x fixé dans $]0,1[$; donnez une majoration de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.

(e) En remplaçant $\arcsin x$ par $\mathcal{P}_2(x)$ dans l'équation à résoudre, déterminez une valeur approchée de la solution de l'équation. S'agit-il d'une approximation par excès ou par défaut ? Justifiez.

Remédiation 1 d'Analyse - Réponses succinctes aux questions posées.

i. Oui

ii. Non

iii. Oui

iv. $\alpha = 2$

v. (a)
$$c \sim \sqrt{gH}, \quad (\lambda \to +\infty)$$

(b)
$$c \sim \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad (\lambda \to 0)$$

(c)
$$\alpha = \frac{\pi}{\rho\lambda}\sqrt{\frac{2\pi \operatorname{th}\dfrac{2\pi H}{\lambda}}{g\lambda}}$$

vi.
$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad b_2 = \frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}$$

vii. (a) -

(b) $x \in]-1,1[$

(c)
$$\mathcal{P}_2(x) = x \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{6}\,\frac{1+2(\theta x)^2}{\left[\sqrt{1-(\theta x)^2}\right]^5}, \quad \theta \in]0,1[$$

(d)
$$|\mathcal{R}_2(x)| < \frac{x^3(1+2x^2)}{6\left[\sqrt{1-x^2}\right]^5}$$

(e) Par excès