Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0002 - Analyse Mathématique

Évaluation formative

Octobre 2022

Question I

i. Justifiez l'application de la formule de Taylor à la fonction $f(x) = \sqrt{3+x}$ au voisinage de 1.
Sur quel intervalle cette formule est-elle applicable ? À quel ordre $n \in \mathbb{N}_0$ peut-elle être appliquée ?

ii. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-1)$ approchant $f(x)$ au voisinage de 1 ainsi que l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.

iii. En utilisant les résultats du point précédent, déterminez une valeur approchée de $f(1.1)$ ainsi qu'une majoration de l'erreur associée.

Question II

L'océan peut être décrit comme la superposition de deux masses d'eau. Les eaux de surface sont réchauffées par le soleil tandis que les eaux en profondeur ne le sont pas. Les deux couches sont séparées par une zone de transition rapide de la température appelée thermocline. Cette thermocline peut subir des mouvements verticaux qui se propagent comme une onde avec une vitesse de phase donnée par

$$c(k) = \sqrt{\frac{\Delta b}{k}} \left[\frac{1}{\mathrm{th}[kd]} + \frac{1}{\mathrm{th}[k(D-d)]} \right]^{-1/2}$$

où Δb caractérise la différence de densité entre les deux couches, k est le nombre d'onde ($= 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde), d est l'épaisseur de la couche de surface et D est la profondeur totale de l'océan.

Dans ce contexte, on supposera évidemment que Δb, k, d, D et $D-d$ sont strictement positifs.

Déterminez un comportement asymptotique de c en fonction de k

i. pour des grandes longueurs d'onde, *i.e.* pour $k \to 0^+$;

ii. pour des petites longueurs d'onde, *i.e.* pour $k \to +\infty$.

Question III

i. On dit que f est au plus de l'ordre de g au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, ce qu'on écrit $f = O(g)$, $(x \to x_0)$, lorsque

$$(\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Sur cette base, peut-on affirmer que si $f = O(|x-x_0|^k)$ et $g = O(|x-x_0|^k)$ au voisinage de x_0 alors $f+g = O(|x-x_0|^k)$, $(x \to x_0)$? Justifiez.

ii. Si la fonction réelle $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ présente un maximum local en $x_\star$, la fonction $\sin[f(x)]$ peut-elle présenter un minimum local en $x_\star$? Justifiez.

iii. Un théorème affirme que si la fonction réelle $f \in C_n(\mathtt{I})$ possède $(n+1)$ zéros distincts dans $\mathtt{I}$, alors $f^{(n)}$ possède au moins un zéro dans $\mathtt{I}$.

(a) Démontrez le théorème dans le cas où $n = 1$.

(b) Généralisez la démonstration pour $n \in \mathbb{N}_0$ quelconque.

Question I

i. La fonction $f(x) = \sqrt{3+x}$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur l'intervalle $]-3,+\infty[$, la formule de Taylor est applicable au voisinage de 1 à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $x \in]-3,+\infty[$.

La fonction f vérifie en effet alors les hypothèses de Taylor puisqu'elle est réelle, n fois continument dérivable sur $[1,x]$ (resp. sur $[x,1]$) et $n+1$ fois dérivable sur $]1,x[$ (resp. sur $]x,1[$).

3 hypothèses de Taylor citées et particularisées au $\mathcal{V}(1)$: 1 pt
Intervalle correct : 1 pt
Ordre quelconque : 1 pt
Total i : 3 pts

ii. La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

avec

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1)$$

et

$$\mathcal{R}_2 = \frac{(x-1)^3}{6} f'''(\xi) \quad \text{où} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou }]x,1[\text{ si } x<1)$$

Expression de $\mathcal{P}_2$ citée ou mise en pratique : 2 pts
Expression de $\mathcal{R}_2$ citée ou mise en pratique : 3 pts (dont 1 pt pour l'info. sur ξ)

On calcule successivement

$$f(x) = \sqrt{3+x}, \qquad f(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}, \qquad f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\,(3+x)^{3/2}}, \qquad f''(1) = -\frac{1}{32}$$

Expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$: 2 pts

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{64}(x-1)^2$$

Expression de $\mathcal{P}_2(x)$: 1 pt

La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{3}{8\,(3+x)^{5/2}}$$

Expression de $f'''(x)$: 1 pt

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{1}{16\,(3+\xi)^{5/2}}(x-1)^3 \quad \text{où} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou }]x,1[\text{ si } x<1)$$

Expression correcte de $\mathcal{R}_2(x)$ avec ξ : 1 pt.

Total ii : 10 pts

iii. Le polynôme de Taylor établi ci-dessus fournit la valeur approchée de $f(1.1)$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2(1.1) = \mathcal{P}_2\left(\frac{11}{10}\right) &= 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{40} - \frac{1}{6400} = \frac{12800+160-1}{6400} = \frac{12959}{6400}\end{aligned}$$

Principe : 1 pt
Valeur approchée correcte : 1 pt (aussi sous la forme décimale exacte 2.02484375 ou même arrondie)

L'erreur associée peut être exprimée sous la forme

$$\mathcal{R}_2(1.1) = \mathcal{R}_2\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{1}{16\,(3+\xi)^{5/2}}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \quad \text{où} \quad \xi \in]1, 1.1[$$

Expression de l'erreur : 1 pt
Position de ξ : 1 pt

Il est possible de majorer cette expression en remplaçant le dénominateur par sa borne inférieure soit, puisque $\xi \in]1, 1.1[$,

Majoration : 3 pts

$$|\mathcal{R}_2(1.1)| \leq \frac{1}{16\,(3+1)^{5/2}}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{16000}\frac{1}{32} = \frac{1}{512\,000}$$

Si les estimations de $\sqrt{4.1}$ et de l'erreur associée sont exprimées sous forme décimale, le nombre de décimales et les arrondis doivent être choisis de façon cohérente.

- *Puisqu'il s'agit de fournir une majoration de l'erreur, la valeur approchée de* $1/512\,000$ *ne peut être arrondie que vers le haut,* i.e. $2\;10^{-6}$ *est acceptable mais* $1.9\;10^{-6}$ *ne l'est pas.*
- *Puisque la précision de l'estimation est de* $\Delta y = 2\;10^{-6}$*, il convient de donner l'estimation* $\tilde{y} = \mathcal{P}_2(1.1)$ *de* $\sqrt{4.1}$ *avec six décimales,* i.e. *sous la forme* 2.024844*. Par contre, l'expression* 2.02484 *qui comporte seulement cinq chiffres significatifs après la virgule contient intrinsèquement une incertitude de* $\pm 5\;10^{-6}$ *qui est supérieure à la borne de l'erreur, ce qui induit un manque de cohérence.*

-2 pts si les résultats sont donnés de façon décimale avec une ou plusieurs incohérences.

Total iii : 7 pts

TOTAL QI : 20 PTS

Question II

i. Puisque

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = x + O(x^3), \quad (x \to 0)$$

on peut écrire

Méthode (calcul de limite ou exploitation des comportements asymptotiques) : 2 pts

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\operatorname{th}[kd]} + \frac{1}{\operatorname{th}[k(D-d)]}\right] &= \left[\frac{\operatorname{th}[k(D-d)] + \operatorname{th}[kd]}{\operatorname{th}[kd]\operatorname{th}[k(D-d)]}\right] \\
&= \left[\frac{k(D-d) + kd + O(k^3)}{(kd + O(k^3))(k(D-d) + O(k^3))}\right] \\
&\sim \frac{D}{kd(D-d)}, \qquad (k \to 0)
\end{aligned}$$

Le raisonnement basé sur $\operatorname{th} x \sim x, \quad (x \to 0)$ *et*

$$\left[\frac{1}{\operatorname{th}[kd]} + \frac{1}{\operatorname{th}[k(D-d)]}\right] \sim \left[\frac{1}{kd} + \frac{1}{k(D-d)}\right] = \frac{D}{kd(D-d)}, \qquad (k \to 0)$$

est aussi acceptable. Sans autre hypothèse, le comportement asymptotique d'une somme n'est pas égal à la somme des comportements asymptotiques. Cependant, ce résultat est valable dès lors que les manipulations ne provoquent pas la simplification des termes dominants des différents termes.

et, dès lors,

$$\begin{aligned}
c(k) &= \sqrt{\frac{\Delta b}{k}}\left[\frac{1}{\operatorname{th}[kd]} + \frac{1}{\operatorname{th}[k(D-d)]}\right]^{-1/2} \\
&\sim \sqrt{\frac{\Delta b}{k}}\left[\frac{D}{kd(D-d)}\right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{\Delta b\, d(D-d)}{D}}, \quad (k \to 0^+)
\end{aligned}$$

Résultat : 2 pts (1 pt si erreur de coefficient)

Total i. : 4 pts

ii. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{th}[kd] = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{th}[k(D-d)] = 1$$

Méthode (exploitation de $\operatorname{th} x \sim 1$ ou calcul de limite de l'expression entre []) : 2 pts

de sorte que

$$c(k) = \sqrt{\frac{\Delta b}{k}} \left[\frac{1}{\operatorname{th}[kd]} + \frac{1}{\operatorname{th}[k(D-d)]}\right]^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{\Delta b}{k}}\,(2)^{-1/2}, \quad (k \to +\infty)$$

Résultat : 2 pts (1 pt si erreur de coefficient)

c'est-à-dire

$$c(k) \sim \sqrt{\frac{\Delta b}{2k}}, \quad (k \to +\infty)$$

Total ii. : 4 pts

TOTAL QII : 8 PTS

Question III

i. Si $f = O(|x-x_0|^k)$ et $g = O(|x-x_0|^k)$ au voisinage de x_0, on peut écrire, en vertu de la définition de la notation "au plus de l'ordre de",

Traduction des hypothèses avec $C_1 \neq C_2$ et $V_1 \neq V_2$: 1 pt

$$(\exists C_1 > 0 \text{ et } V_1(x_0))(\forall x \in V_1(x_0)) : |f(x)| \leq C_1|x-x_0|^k$$

et

$$(\exists C_2 > 0 \text{ et } V_2(x_0))(\forall x \in V_2(x_0)) : |g(x)| \leq C_2|x-x_0|^k$$

Démonstration : 3 pts (dont C_3 : 1 pt, V_3 : 1 pt et $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$: 1 pt)

de sorte que

$$(\exists C_3 = C_1 + C_2 > 0 \text{ et } V_3(x_0) = V_1(x_0) \cap V_2(x_0))(\forall x \in V_3(x_0)) :$$
$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq (C_1+C_2)|x-x_0|^k = C_3|x-x_0|^k$$

La fonction $f+g$ est donc au plus de l'ordre de $|x-x_0|^k$ au voisinage de x_0.

Vu l'énoncé ("Sur cette base..."), 0/4 si démonstration se basant sur les limites

Total i : 4 pts

ii. Il est possible que f présente un maximum local en $x_\star$ et que $\sin[f(x)]$ présente un minimum local en ce même point. Pour le montrer, il suffit de considérer la fonction $f(x) = -\pi/2 - x^2$.

Exemple correct : 3 pts

La fonction f est réelle, indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$ et présente un maximum local en $x_\star = 0$.

La fonction composée $g(x) = \sin[f(x)] = \sin(-\pi/2 - x^2)$ présente quant à elle un minimum en $x_\star = 0$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Justification du minimum : 1 pt

$$g(0) = \sin(-\pi/2) = -1 \leq g(x)$$

Total ii : 4 pts

iii. (a) Notons x_1 et x_2 les deux points distincts de l'intervalle $\mathtt{I}$ en lesquels la fonction réelle $f \in C_1(\mathtt{I})$ s'annule.

Appel au théorème de Rolle : 1 pt

Les hypothèses du théorème de Rolle sont rencontrées puisque, dans les conditions envisagées, f est réelle, continue [1] sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$ et que $f(x_1) = f(x_2)$. Par ce théorème, on conclut donc à l'existence d'un point $\xi \in]x_1, x_2[\subset \mathtt{I}$ tel que $f'(\xi) = 0$, comme annoncé.

Vérification des hypothèses : 2 pts
Conclusion : 1 pt
Total (a) : 4 pts

(b) La propriété peut être généralisée en procédant par induction sur n.

Soit $\mathcal{P}_n$, la proposition "Si la fonction réelle $f \in C_n(\mathtt{I})$ possède $(n+1)$ zéros distincts dans $\mathtt{I}$, alors $f^{(n)}$ possède au moins un zéro dans $\mathtt{I}$."

- Le cas de base est apporté par le point (a) : la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Si on suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie (hypothèse inductive), montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  Si une fonction réelle $f \in C_{n+1}(\mathtt{I})$ est réelle et possède $(n+2)$ zéros distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$ dans $\mathtt{I}$, alors, par application du raisonnement mené en (a) dans chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec $i \in \{1, 2, \ldots, (n+1)\}$ on établit l'existence de $(n+1)$ points $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ en lesquels $f'(\xi_i) = 0$. Les $(n+1)$ points ξ_i sont distincts puisqu'ils appartiennent à des intervalles disjoints.

  L'hypothèse inductive appliquée à la fonction $g = f'$ justifie dès lors l'existence d'un point $\xi \in \mathtt{I}$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ puisque g est réelle, appartient à $C_n(\mathtt{I})$ et s'annule en les $n+1$ points distincts ξ_i. Puisque $f^{(n+1)}(\xi) = g^{(n)}(\xi) = 0$, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est ainsi démontrée.
- Par le principe d'induction, on en déduit que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Principe de la généralisation (par induction ou non) : 2 pts
Rigueur dans la formulation (intégration des hypothèses) : 1 pt

Total (b) : 3 pts
Total iii : 7 pts
TOTAL QIII : 15 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- On remarquera d'abord que la fonction f n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur $]-3, +\infty[$. Dès lors, la formule de Taylor ne peut être appliquée pour évaluer la fonction en $x = -3$ à quel qu'ordre que ce soit.
- On sera attentif à exprimer les hypothèses correctes de la formule de Taylor. Les hypothèses pour appliquer cette formule à l'ordre n sont que f est réelle, n fois continûment dérivable sur l'intervalle $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant $]1, x[$ (ou $]x, 1[$). Les concepts de continuité, de dérivabilité et de continue dérivabilité ne sont pas interchangeables.

ii.
- L'expression "polynôme de degré 2 en $(x-1)$" désigne un polynôme de la forme

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$$

  Il ne s'agissait donc pas d'évaluer le polynôme de Taylor au point $(x-1)$ plutôt que x ni de développer le polynôme obtenu.
- De trop nombreux étudiants incluent le reste $\mathcal{R}_2$ dans l'expression du polynôme de Taylor. Ceci n'est pas correct. On a

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

  où le polynôme de Taylor est donné par

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$$

iii.
- Quand on exprime un résultat et que celui-ci peut s'exprimer de façon exacte, il faut se limiter à cette expression. Ici, la valeur approchée de $f(1.1)$ donnée par $\mathcal{P}_2(1.1)$ pouvait s'exprimer sous la forme d'une fraction. Si on veut remplacer cette fraction par une valeur approchée, il faut faire apparaître un nombre

1. Rappelons que la notation $f \in C_1(\mathtt{I})$ signifie que f est continument dérivable sur $\mathtt{I}$, *i.e.* que la fonction est continue et dérivable sur $\mathtt{I}$ et que sa dérivée est également continue sur cet intervalle.

suffisant de décimales par rapport à l'objectif de précision visé. Il en va de même de la majoration de l'erreur. Surtout, il faut éviter d'arrondir vers le bas la borne de l'erreur obtenue dans le cadre de la majoration. En ignorant des décimales, on risque de produire une estimation de l'erreur qui ne majore plus l'erreur réelle. Si on veut ou doit arrondir la borne supérieure de l'erreur, cet arrondi doit être vers le haut.

- Les développements comportent trop d'erreurs de calcul. Le calcul algébrique ne devrait plus poser de problème à ce stade de vos études.

Question II

- Le comportement asymptotique pour $k \to 0$ peut aussi être obtenu à partir du calcul de
$$\lim_{k \to 0} c(k) = \sqrt{\frac{\Delta b\, d(D-d)}{D}} \neq 0 \tag{♠}$$
Le calcul de cette limite demande de maîtriser les techniques de calcul des limites ainsi que la définition de la fonction th. Il peut s'avérer assez lourd. Comme indiqué dans la solution type, le calcul des limites et la détermination des comportements asymptotiques peuvent être considérablement simplifiés en utilisant à bon escient le comportement asymptotique des fonctions qui composent l'expression étudiée. Les comportements asymptotiques des fonctions élémentaires doivent donc être connus pour pouvoir être exploités.
- Le résultat
$$\lim_{k \to +\infty} c(k) = 0$$
ne peut être interprété en disant que la fonction est asymptotique à zéro au voisinage de l'infini. Rappelons que seule la fonction nulle est asymptotique à zéro. Lorsqu'on observe une limite nulle, il convient de caractériser le taux de décroissance vers zéro de la fonction étudiée en faisant apparaître une expression plus simple qui décroit vers zéro à la même vitesse.
- Il convient d'adopter les bonnes notations et de ne pas confondre les concepts de limite et de comportement asymptotique. A partir de (♠), on peut écrire
$$c(k) \sim \sqrt{\frac{\Delta b\, d(D-d)}{D}}, \qquad k \to 0$$
pas
$$c(k) = \sqrt{\frac{\Delta b\, d(D-d)}{D}}, \qquad k \to 0$$
Le signe d'égalité ne peut être écrit qu'entre des expressions qui sont rigoureusement identiques.
- Les calculs doivent être menés à leur terme. Lorsqu'on fournit une réponse, celle-ci doit être simplifiée autant que possible.

Question III

i. - Lorsqu'une démonstration est demandée, il faut être attentif aux hypothèses sur lesquelles on peut s'appuyer et au raisonnement qui est demandé. C'est particulièrement vrai lorsque la propriété ou le résultat qu'il faut démontrer est énoncé dans le cours. Si on en demande la démonstration, on ne peut

évidemment se borner à faire référence au résultat du cours. Il faut expliciter le raisonnement permettant de démontrer celui-ci.
Dans cette question, il était attendu de se baser sur la définition générale de $f = O(g), \ (x \to x_0)$ sous la forme

$$(\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)| \qquad (\diamondsuit)$$

pour établir le résultat. Ceci implique de ne pas se baser sur le résultat

$$f_1 = O(g), f_2 = O(g) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha f_1 + \beta f_2 = O(g)$$

puisque c'est fondamentalement ce qu'on demande de démontrer dans un cas particulier en repartant de la définition générale.
Il n'est pas non plus approprié de mener la démonstration en se basant sur les hypothèses

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^k} \in \mathbb{R} \qquad (\heartsuit)$$

puisque celles-ci ne sont pas celles de l'énoncé.

- La définition ($\heartsuit$) de O via des limites n'est pas générale et ne peut donc se substituer à la définition générale ($\diamondsuit$) donnée dans l'énoncé. Par exemple, on sait que $\sin x = O(1)$ au voisinage de l'infini puisque la définition ($\diamondsuit$) ci-dessus s'applique avec, par exemple, $C = 1$ et $V(+\infty) =]0, +\infty[$. Par contre,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{1} \nexists$$

de sorte que ($\heartsuit$) ne s'applique pas.

- La traduction correcte des deux hypothèses $f = O(|x - x_0|^k)$ et $g = O(|x - x_0|^k)$ au voisinage de x_0 en partant de ($\diamondsuit$) demande de faire apparaître des constantes C et des voisinages $V(x_0)$ différents pour les deux fonctions f et g. La définition ($\diamondsuit$) permet en effet d'affirmer l'existence d'une constante C et d'un voisinage $V(x_0)$ permettant la majoration de chacune des fonctions. Par contre, rien ne dit que ces éléments sont les mêmes pour les deux fonctions.
De façon générale, chaque fois que le quantificateur existentiel $\exists$ apparait dans une expression, la chose dont on affirme l'existence peut dépendre de tout ce qui précède. Ce n'est pas le cas des éléments introduits par le quantificateur universel $\forall$.

ii. • Quand un énoncé est proposé et qu'on ne sait a priori s'il est vrai ou faux, il convient d'abord de se forger une opinion par quelques raisonnements simples ou en analysant quelques exemples.
Ici, on pouvait assez simplement établir que la fonction composée définie par $g(x) = \sin[f(x)]$ est stationnaire en $x_\star$ si f présente un maximum local en ce point puisque

$$g'(x_\star) = \cos[f(x_\star)] \ f'(x\star) = 0$$

tenant compte du fait que f est stationnaire en $x_\star$ puisqu'elle y est dérivable et présente un maximum local. Ensuite, on pouvait calculer

$$g''(x_\star) = -\sin[f(x_\star)] \ (f'(x\star))^2 + \cos[f(x_\star)] \ f''(x\star) = \cos[f(x_\star)] \ f''(x\star)$$

qui peut être positif ou négatif et faire donc apparaître la possibilité de la présence d'un maximum ou d'un minimum de g selon le signe de $\cos[f(x_\star)]$, pour autant que $f''(x\star)$ soit non nul. Ceci ne constitue pas une démonstration complète à la question posée mais permet de savoir dans quelle direction il faut avancer.

- Ensuite, il faut se poser la question de la façon dont le résultat pressenti peut être pleinement justifié. Suffit-il de fournir un exemple ou doit-on mener une démonstration générale ?
  En général, si on veut montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre-exemple qui vérifie les hypothèses et contredit l'énoncé. Si, par contre, la proposition est vraie, il faudra normalement mener une démonstration rigoureuse qui s'applique à toutes les situations définies par les hypothèses.
  Dans le cadre de la question posée, on comprend qu'on peut répondre par l'affirmative simplement en donnant un exemple. Pour montrer que $g = \sin[f(x)]$ peut présenter un minimum en $x_\star$, comme suggéré par l'analyse initiale, il suffit de donner l'exemple d'une fonction qui se comporte de la sorte. Il n'est pas nécessaire de mener une démonstration générale. La façon la plus convaincante, et souvent la plus simple, de montrer que quelque chose existe est bien de donner un exemple.
- La recherche d'un exemple approprié peut être menée en exploitant les développements ci-dessus. Il suffit de trouver une fonction f présentant un maximum en $x_\star$ avec $f''(x_\star) < 0$ et $\cos[f(x_\star)] < 0$ de sorte que $g''(x_\star)$ soit positif. La condition $\cos[f(x_\star)] < 0$ peut être aisément rencontrée en veillant, par exemple, à ce que $f(x_\star) = \pi$.
- Dans les raisonnements menés pour répondre à cette question, on relève une grande confusion par rapport au caractère nécessaire ou suffisant des différentes conditions d'extrémalité. Rappelons que, si f est au moins C_2, l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire d'extrémalité, *i.e.*

  $$f \text{ extrémale en } x_\star \qquad \Rightarrow \qquad f'(x_\star) = 0$$

  par contre,

  $$f'(x_\star) = 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad f \text{ extrémale en } x_\star$$

  Par ailleurs, si $f'(x_\star) = 0$ alors

  $$f''(x_\star) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ maximale en } x_\star$$

  i.e. il suffit que la dérivée seconde soit strictement négative au point stationnaire pour que celui-ci corresponde à un maximum local. Par contre, la réciproque n'est pas vraie, *i.e.*

  $$f \text{ maximale en } x_\star \qquad \Rightarrow \qquad f''(x_\star) < 0$$

iii.
- Comme indiqué dans la solution type, la première partie de la question relevait d'une simple application du théorème de Rolle. Pour appliquer un théorème, il convient cependant de montrer que toutes les hypothèses en sont vérifiées. Ici, on notera que la fonction est réelle et que sa continuité et sa dérivabilité sur les intervalles fermés et ouverts requis découle de l'appartenance de f à l'ensemble $C_1(\mathtt{I})$ des fonctions continûment dérivables sur $\mathtt{I}$.
- La démonstration dans le cas $n = 1$ était également possible sans faire appel au théorème de Rolle, même s'il convient alors d'adopter un raisonnement qui est semblable à celui de la démonstration de ce théorème. Dans cette approche alternative, il convient de tenir compte des cas particuliers éventuels et de bien faire apparaître les hypothèses nécessaires au raisonnement.
  Dans beaucoup de réponses, on lit le raisonnement suivant. "Puisque la fonction s'annule en x_1 et x_2, elle doit être croissante dans une partie de l'intervalle $[x_1, x_2]$ et décroissante sur l'autre. La dérivée prend donc des signes différents sur deux parties et s'annule nécessairement à la jonction entre ces deux intervalles".

D’une part, cette annulation doit être justifiée par la continuité de la dérivée, hypothèse qui est bien fournie dans l’énoncé. D’autre part, le raisonnement ne s’applique pas si la fonction est constante. Il faut donc traiter spécifiquement ce cas particulier.

- La propriété est parfois démontrée dans le cas très particulier d’un polynôme, sans même prendre conscience de la simplification excessive qui en résulte. Le fait qu’une fonction possède n zéro n’implique pas que cette fonction s’identifie à un polynôme de degré n.
- La généralisation de la démonstration pour n quelconque doit être présentée aussi précisément que possible, là où on constate souvent des formulations approximatives.