Prof. Éric J.M.DELHEZ

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Octobre 2020

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul·e, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de trois heures.

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours d'Analyse du 20 octobre (Groupe Z) ou du cours d'Algèbre du 21 octobre (Groupe A).*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

i. Démontrez la relation $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1+\operatorname{ch} 2x}{2}$.

ii. Si $f_1 = O(x)$ et $f_2 = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0, peut-on dire que $f_1 + f_2 = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $(x \to 0)$? Justifiez.

iii. Démontrez que la fonction $f(x) = \ln x + \sqrt{1+x^2}$ admet une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$ et déterminez $g'(\sqrt{2})$.

Question II

i. Déterminez le polynôme $\mathcal{P}_2(x)$ obtenu par application de la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

au voisinage de 0 ainsi que l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée. Pour quelles valeurs de x ces expressions sont-elles valables ?

ii. En utilisant les résultats obtenus au point i., déterminez une expression approchée de $\pi/6$ ainsi qu'une borne de l'erreur correspondante.

Question III

En discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre réel $n > 0$, identifiez les points stationnaires de la fonction

$$V(\theta) = -n^2 \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \cos^3 \theta \quad \text{où} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

et déterminez leur nature.

SOLUTION TYPE

Question I

i. En exprimant la fonction ch en fonction des exponentielles, on peut écrire

$$\operatorname{ch}^2 x = \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}{4} = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}+1}{2} = \frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}$$

Connaissance de la fonction ch : 1 pt
Développements : 1 pt

Total i. : 2 pts

ii. Puisque $f_1 = O(x),\ (x\to 0)$, il existe un voisinage V_1 de 0 et une constante $C_1>0$ tels que

$$|f_1(x)| \leq C_1|x| \quad \text{sur} \quad V_1$$

Puisque $f_2 = O\left(\dfrac{1}{x}\right),\ (x\to 0)$, il existe un voisinage V_2 de 0 et une constante $C_2>0$ tels que

$$|f_2(x)| \leq \frac{C_2}{|x|} \quad \text{sur} \quad V_2$$

Traduction mathématique correcte des hypothèses : 2 pts

Ainsi, sur $V = V_1\cap V_2$,

$$|f_1(x)+f_2(x)| \leq |f_1(x)|+|f_2(x)| \leq C_1|x| + \frac{C_2}{|x|}$$

Démonstration : 3 pts dont 1 pt pour la gestion appropriée des voisinages

Or, sur $V\cap]-1,1[,\ |x| < \dfrac{1}{|x|}$ donc

$$|f_1(x)+f_2(x)| \leq \frac{C_1+C_2}{|x|}$$

et nous pouvons dire que

$$f_1+f_2 = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x\to 0)$$

Nous pouvons aussi raisonner de manière alternative dans le cas particulier où les comportements asymptotiques des fonctions f_1 et f_2 traduisent l'existence des limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{x} = M_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)}{1/x} = M_2$$

Pour le raisonnement alternatif au moyen de limites :
Hypothèses : 1 pt

Ces expressions ne constituent cependant pas une définition générale du concept de O.

1 pt si mention du caractère non général de la démonstration

Il vient alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f_1(x)}{x}\,x^2 + \frac{f_2(x)}{1/x}\right) = M_2$$

ce qui implique que

$$f_1+f_2 = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x\to 0)$$

Démonstration : 2 pts

Total ii. : 5 pts (maximum 4 pts pour le raisonnement avec les limites)

iii. La fonction $f(x) = \ln x + \sqrt{1+x^2}$ est réelle et continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ avec

$$f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x^2}{x\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \text{sur} \quad]0,+\infty[$$

$f \in C_1(]0,+\infty[)$: 1 pt
$Im f = \mathbb{R}$: 1 pt
$f' > 0$: 1 pt

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en conclut que f possède une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est donnée par

Expression de $g'(x)$: 1 pt

$$g'(x) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=g(x)} = \frac{g(x)\sqrt{1+g^2(x)}}{\sqrt{1+g^2(x)}+g^2(x)}$$

Puisque $f(1) = \sqrt{2}$, on a $g(\sqrt{2}) = 1$ et, utilisant l'expression de $g'(x)$ obtenue ci-dessus,

Valeur de $g'(\sqrt{2})$: 1 pt

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2-\sqrt{2}$$

Total iii. : 5 pts
TOTAL QI : 12 PTS

Question II

i. Vu que

$$-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

la fonction $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$: 1 pt

En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) et 3 fois dérivable sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$).

f réelle : 1 pt
Hypothèse(s) sur la régularité de f (C_2 + 3 fois dérivable ou C_∞) : 1 pt

Le polynôme recherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Expression de $\mathcal{P}_2$ citée ou mise en pratique : 2 pts

On calcule successivement

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{(1+x^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(0) = 0$$

Expressions de $f'(x)$, $f''(x)$: 2 pts
Valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$: 1 pt

de sorte que le polynôme de Taylor est

Expression de $\mathcal{P}_2(x)$: 1 pt

$$\mathcal{P}_2(x) = x$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3$$

où $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$). La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)\frac{x^3}{3!} \quad \text{avec} \quad \xi \in]0,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,0[)$$

Expression générale de $\mathcal{R}_2$ connue ou mise en pratique : 2 pts (dont 1 pt pour l'info. sur ξ)

Expression de $f'''(x)$: 1 pt

Expression de $\mathcal{R}_2(x)$: 1 pt.

Total i. : 13 pts

ii. On a

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$$

et

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arcsin\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Relation entre le nombre $\pi/6$ et la fonction étudiée : 1 pt

de sorte que

$$\frac{\pi}{6} = \mathcal{P}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \mathcal{R}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

On obtient donc une valeur approchée de $\pi/6$,

$$\frac{\pi}{6} \approx \mathcal{P}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Valeur approchée de $\pi/6$: 1 pt

Remarquons que $f(x) = \operatorname{arctg} x$ puisque ces deux fonctions ont la même dérivée et sont égales en $x=0$.

L'erreur commise en utilisant cette valeur approchée est donnée par le reste de la formule de Taylor, soit

$$\mathcal{R}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)\frac{\sqrt{3}}{54} \quad \text{avec} \quad \xi \in \left]0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$$

Expression de l'erreur quand $x=\sqrt{3}/3$: 2 pts dont 1 pt pour la localisation de ξ

où

$$|6\xi^2-2| = 2-6\xi^2 \leq 2$$

et

$$\frac{1}{(1+\xi^2)^3} \leq 1$$

de sorte que

$$\left|\mathcal{R}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| \leq 2\frac{\sqrt{3}}{54} = \frac{\sqrt{3}}{27} \approx 0.064$$

Majoration du reste : 3 pts (1 pt en cas de majoration grossière)

Total ii. : 7 pts

TOTAL QII : 20 PTS

Question III

Soit

$$V(\theta) = -n^2\cos^2\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta \quad \text{où} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Traduction de l'énoncé en la recherche des zéros de V' : 1 pt

Par définition, les points stationnaires de V sont les zéros de

$$V'(\theta) = 2n^2\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta = 2\cos\theta\sin\theta(n^2 - \cos\theta)$$

Expression de V' : 2 pts

Les zéros de V' dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ correspondent à l'annulation des différents facteurs, *i.e.*

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 & \text{soit} \quad \theta = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\theta = 0 & \text{soit} \quad \theta = 0 \\ \cos\theta = n^2 & \text{soit} \quad \theta = \pm\arccos n^2 \quad \text{si } n^2 \leq 1 \end{cases}$$

Les points stationnaires $\pm\arccos n^2$ n'existent que si $n^2 \leq 1$ et se confondent avec $\theta = 0$ si $n^2 = 1$.

On remarquera par ailleurs que, puisque $n^2 > 0$, $\arccos n^2 \in [0, \pi/2[$ de sorte que $\pm\arccos n^2 \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Identification des points stationnaires : 4 pts, dont 1 pt pour la condition d'existence

La nature des différents points stationnaires peut être déterminée à partir de l'étude des dérivées d'ordres supérieurs de V en ces points. Calculons donc

Expression de V'' : 2 pts

$$V''(\theta) = 2n^2\cos^2\theta - 2n^2\sin^2\theta - 2\cos^3\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta$$

ou encore, en exprimant tous les termes au moyen de cosinus,

$$V''(\theta) = 4n^2\cos^2\theta - 2n^2 - 6\cos^3\theta + 4\cos\theta$$

- En $\theta = \pm\pi/2$, on a
$$V''\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = -2n^2 < 0$$
Les positions $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ correspondent donc à des maxima locaux de V quel que soit $n \neq 0$.

Nature des points stationnaires $\pm\pi/2$ (avec justification) : 2 pts

- En $\theta = 0$, on a
$$V''(0) = 2(n^2 - 1)$$
dont le signe dépend de n^2. Ainsi,
  - ◇ si $n^2 < 1$, $V''(0) < 0$ et le point stationnaire est un maximum de V ;
  - ◇ si $n^2 > 1$, $V''(0) > 0$ et le point stationnaire est un minimum de V ;
  - ◇ si $n^2 = 1$, $V''(0) = 0$ et la nature du point stationnaire ne peut pas être déterminée à partir de la seule connaissance de la dérivée seconde en ce point.

Nature du point stationnaire en $\theta = 0$ pour $n^2 \neq 1$ (avec justification) : 3 pts

- Quand $n^2 \leq 1$, il faut encore étudier les positions correspondant à $\cos\theta = n^2$ pour lesquelles
$$V''(\pm\arccos n^2) = 4n^6 - 2n^2 - 6n^6 + 4n^2 = 2n^2(1 - n^4)$$
dont le signe dépend de n^2. Ainsi,
  - ◇ si $n^2 < 1$, $V''(\pm\arccos n^2) > 0$ et les deux points stationnaires sont des minima de V ;

Nature des points stationnaires $\pm\arccos n^2$ pour $n^2 < 1$ (avec justification) : 2 pts

- si $n^2 = 1$, $V''(\pm \arccos n^2) = V''(0) = 0$ et la nature du point stationnaire ne peut pas être déterminée à partir de la seule connaissance de la dérivée seconde en ce point.

Les développements qui précèdent ont permis de déterminer la nature de tous les points stationnaires sauf de $\theta = 0$ dans le cas où $n^2 = 1$. Pour lever l'indétermination associée à l'annulation de la dérivée seconde du potentiel, nous pouvons avoir recours à l'étude des dérivées d'ordres supérieurs. La dérivée troisième n'est pas d'un grand secours dans la mesure où

Cas particulier $n^2 = 1$ avec justification : 3 pts

$$V^{(3)}(\theta) = -8\sin\theta\cos\theta + 18\cos^2\theta\sin\theta - 4\sin\theta \quad \text{et} \quad V^{(3)}(0) = 0$$

La dérivée quatrième donne par contre

$$V^{(4)}(\theta) = 8\sin^2\theta - 8\cos^2\theta - 36\cos\theta\sin^2\theta + 18\cos^3\theta - 4\cos\theta \quad \text{et} \quad V^{(4)}(0) = 6 > 0$$

La première dérivée non nulle étant d'ordre pair et positive, on en conclut qu'il existe un minimum de V en $\theta = 0$ quand $n^2 = 1$. En conclusion,

Présence d'une conclusion reprenant les résultats établis plus haut, même faux : 1 pt

i. si $n^2 \geq 1$,
   - les points stationnaires $\theta = \pm\pi/2$ sont des maxima;
   - le point stationnaire $\theta = 0$ est un minimum.

ii. si $n^2 < 1$,
   - les points stationnaires $\theta = \pm \arccos n^2$ sont des minima;
   - les points stationnaires $\theta = \pm\pi/2$ et $\theta = 0$ sont des maxima.

Rem. La nature des points stationnaires pourrait aussi être étudiée par d'autres méthodes, sans pénalisation.

TOTAL QIII : 20 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Quelle que soit la question posée, il ne faut pas se contenter d'indiquer une suite de calculs mais il faut aussi expliquer pourquoi on fait ces calculs et quelles conclusions on peut en tirer.

Question I

i. Les relations de ce type, semblables aux relations entre les fonctions trigonométriques, peuvent être démontrées simplement en repartant de la définition des fonctions hyperboliques.

ii.
   - Dans de nombreuses situations, on peut justifier que $f = O(g)$ au voisinage d'un point x_0 en montrant que
     $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M \in \mathbb{R}$$
     Cependant, ceci ne constitue pas une définition générale du concept de O. On ne peut donc écrire
     $$f = O(g), \quad (x \to x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M \in \mathbb{R}$$

Tout raisonnement se basant sur cette relation est restrictif ; il ne couvre pas le cas général.

Par exemple, on peut écrire que

$$\sin x = O(1),\ (x \to +\infty) \qquad \text{puisque} \qquad |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pourtant, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1} \quad \nexists$$

La définition générale du concept est donnée par la formule (1.120) des notes de cours,

$$(\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)| \tag{1}$$

C'est donc sur cette définition qu'il conviendrait de s'appuyer.

Dans la définition, on remarquera la présence des barres de module. Dans le cas réel, la relation signifie que f peut être majorée *en valeur absolue* par la fonction g au voisinage de x_0.

- En exploitant la définition pour traduire les comportements asymptotiques des fonctions f_1 et f_2 au voisinage de l'origine, il faut être attentif à utiliser des valeurs de C et $V(0)$ différentes pour les deux fonctions et gérer de façon appropriée ces deux valeurs de la constante et du voisinage correspondant. Le quantificateur existentiel $\exists$ intervenant dans la définition dit qu'il existe une constante C et un voisinage $V(0)$ tel que ... Rien ne permet d'affirmer que la même constante et le même voisinage peuvent être utilisés pour les deux fonctions intervenant dans l'énoncé proposé.

- De $f_1(x) = O(x)$ et $f_2(x) = O(1/x)$ au voisinage de 0, on ne peut déduire que $f_1(x) = o(f_2(x))$, même en tenant compte du fait que $x = o(1/x),\ (x \to 0)$. Il suffit de considérer le contre-exemple constitué des fonctions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ pour s'en convaincre.

- Dans une démonstration, il convient de justifier les différentes étapes du raisonnement. Il ne faut pas se contenter d'affirmer des implications sans preuve ou référence à des résultats connus et acceptés.

iii.

- La réponse à cette question pouvait être menée systématiquement en s'appuyant sur le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques présenté au cours théorique et appliqué à cette occasion à plusieurs fonctions.

  Cette approche ne demande pas d'établir explicitement la forme de la fonction réciproque, ce qui est impossible dans le cas étudié.

- Rappelons que $C_1(]0,+\infty[)$ désigne l'ensemble des fonctions continûment dérivables, *i.e.* des fonction dérivables dont la dérivée est continue. Il ne faut pas confondre l'ensemble C_1 avec l'ensemble C_0 des fonctions continues ou avec l'ensemble des fonctions continues et dérivables.

- On notera que la réciproque d'une somme n'est pas la somme des fonctions réciproques. On ne peut d'ailleurs pas justifier l'existence de la réciproque d'une somme de deux fonctions par l'existence de la réciproque de chacune des deux fonctions. Par exemple, les fonctions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$ admettent toutes deux une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$ mais leur somme $f_1 + f_2 = 0$ n'admet de fonction réciproque sur aucun intervalle $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$.

- Si le graphique de la réciproque d'une fonction f peut s'obtenir en permutant les axes des abscisses et des ordonnées, on ne peut cependant pas obtenir l'expression de la fonction réciproque en échangeant x et y, *i.e.* :

$$f(x) = \ln x + \sqrt{1+x^2} = y \qquad \not\Rightarrow \qquad x = \ln y + \sqrt{1+y^2} = f^{-1}(y)$$

- On notera que le calcul de $g'(\sqrt{2})$ demande de calculer

$$g'(\sqrt{2}) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=g(\sqrt{2})=1}$$

puisque $f(1) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad g(\sqrt{2}) = 1$ et non pas

$$g'(\sqrt{2}) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=\sqrt{2}}$$

Question II

i.
- Toute application de la formule de Taylor doit débuter par la vérification des hypothèses correspondantes. Justifier théoriquement l'application de la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction donnée consiste à vérifier que cette fonction remplit les hypothèses de la formule en particularisant les hypothèses générales de la formule de Taylor au cas de la fonction, du voisinage et de l'ordre considérés. Sur base de cette analyse, on peut déterminer les valeurs de x pour lesquelles la formule est applicable.

- Dans la vérification des hypothèses de Taylor, on ne peut affirmer que la fonction est n fois continûment dérivable sans préciser la valeur de n.

- La formule de Taylor permet d'écrire ici

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

où le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = x$$

Contrairement à ce qui a été observé dans de nombreuses copies, on ne peut écrire

$$\mathcal{P}_2(x) = x + \mathcal{R}_2(x)$$

en confondant f et $\mathcal{P}_2$.

- L'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!}\left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)$$

où $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$ si $x<0$). La dérivée troisième intervenant dans ce reste est évaluée en un point ξ inconnu et dépendant de x. Elle n'est pas évaluée en 0, ni en x. Il est indispensable de préciser le positionnement de ξ.

- Il était clairement demandé dans cet exercice de donner l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$. D'ailleurs, la réponse à la sous-question ii., la majoration de l'erreur, ne peut être réalisée que sur base de la connaissance du reste. Il ne fallait donc pas écrire la formule de Taylor en exprimant le reste par

$$\mathcal{R}_2(x) = O(x^3), \quad (x \to 0)$$

ii.

- La question posée a été très mal comprise. On ne demandait pas une valeur approchée de $f(\pi/6)$, qui aurait été donnée par $\mathcal{P}_2(\pi/6)$, mais bien une valeur approchée du nombre $\pi/6$. Il fallait donc commencer par déterminer $\tilde{x}$ tel que $\pi/6 = f(\tilde{x})$ et ensuite $\mathcal{P}_2(\tilde{x})$.

- Il ne fallait pas non plus utiliser sa calculatrice pour obtenir une expression numérique approchée de $\pi/6$... C'est la formule de Taylor, l'expression du polynôme et de reste correspondant, qui permettait de déterminer la valeur approchée et la borne de l'erreur.

- La majoration du reste consiste à estimer la plus grande valeur que celui-ci peut prendre (en valeur absolue) dans l'intervalle considéré afin d'avoir une idée de la borne supérieure de l'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor.

- Quand on évalue le reste en un x connu, son expression doit être particularisée. Ici, $x = \sqrt{3}/3$ et

$$\mathcal{R}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3}\right)\frac{\sqrt{3}}{54} \text{ avec } \xi \in \left]0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$$

  Chaque occurrence de x doit être remplacée par la valeur à considérer et l'intervalle pour le point mystère ξ est connu (ici $]0, \sqrt{3}/3[$ puisque $\sqrt{3}/3 > 0$).

- Quand la fonction à majorer s'exprime au moyen d'une fraction, une majoration peut être obtenue en donnant la plus grande valeur possible au numérateur et la plus petite au dénominateur (pris en valeur absolue), ce qui peut se produire pour des valeurs de ξ différentes.

  Remarquons qu'il ne suffit pas d'envisager les bornes de l'intervalle de variation de ξ. Le reste pourrait, dans d'autres exercices, prendre sa plus grande valeur en un point à l'intérieur de cet intervalle.

Question III

- Il ne faut pas confondre la variable et le paramètre. Dans cet exercice, la variable est l'angle θ et le paramètre le nombre n^2. Les points stationnaires correspondent donc à des valeurs de θ et pas de n^2.

- Quand un paramètre intervient dans un exercice, il ne faut pas discuter arbitrairement sur les valeurs de celui-ci. Si une discussion est nécessaire, elle apparait naturellement en cours de résolution quand une solution obtenue n'existe pas, qu'une manipulation réalisée n'est pas permise ou que la solution est fondamentalement différente pour certaines valeurs du paramètre.

Ici, les points stationnaires correspondant à $\cos\theta = n^2$ n'existent que si $n^2 \leq 1$. Ils coïncident avec $\theta = 0$ si $n^2 = 1$. Plus loin, la détermination de la nature du point stationnaire $\theta = 0$ dépend du signe de $n^2 - 1$. Ces considérations amènent à distinguer les cas $n^2 < 1$, $n^2 > 1$ et $n^2 = 1$.

- Tout exercice faisant intervenir un paramètre doit également comporter une conclusion reprenant les résultats obtenus pour les différentes valeurs du paramètre.

- Les manipulations des fonctions trigonométriques doivent être maîtrisées. Trop d'erreurs sont constatées. En particulier, l'annulation de $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ ne donne pas seulement le point stationnaire $\theta = 0$ mais aussi les points stationnaires $\theta = \pm\pi/2$. Sur ce même intervalle, les solutions de $\cos\theta = n^2$ sont $\pm\arccos(n^2)$ et n'existent que si $n^2 \leq 1$.

- Dans le cas d'une fonction faisant intervenir un paramètre, la détermination de la nature des points stationnaires sur base d'un tableau de signe de la dérivée première est généralement assez ardue. La méthode basée sur la détermination de la première dérivée non nulle de la fonction en chacun des points stationnaires est par contre bien mieux adaptée car elle ne demande de considérer que les valeurs des dérivées au point stationnaire, et pas dans un voisinage de ce point.

  Rappelons que, si la première dérivée non nulle est d'ordre impair, il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale et que, si elle est d'ordre pair, ce sera un minimum si elle est positive et un maximum si elle est négative.