

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.

Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul-e, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de trois heures.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du **22 octobre**.

- Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.
- Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.
- Indiquez lisiblement votre nom en MAJUSCULES suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur

[www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation](http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation)

### Question I

i. Si  $f_1 = o(x)$  et  $f_2 = o\left(\frac{1}{x}\right)$  au voisinage de 0, peut-on affirmer que  $f_1 + f_2 = o\left(\frac{1}{x}\right)$ , ( $x \rightarrow 0$ ) ? Justifiez.

ii. Si  $f$  et  $g$  sont continues au voisinage de  $x_0$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , peut-on en déduire que

$$\int_{x_0}^x f(t)dt \sim \int_{x_0}^x g(t)dt, \quad (x \rightarrow x_0) \quad ?$$

Justifiez.

- iii. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que  $f_1 \sim f_2$  pour  $x \rightarrow 0$ , peut-on affirmer que  $f_1' \sim f_2'$  au voisinage de 0 ? Justifiez.
- iv. Si  $f \sim (x+1)$  pour  $x \rightarrow +\infty$ , le graphique de  $f$  admet-il l'asymptote oblique  $y = x + 1$  au voisinage de  $+\infty$  ? Justifiez.

### Question II

On cherche à résoudre l'équation

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1+x^3}{3} \quad (\heartsuit)$$

en remplaçant  $\operatorname{arcth} x$  par son polynôme de Taylor de degré 3 au voisinage de 0, noté  $\mathcal{P}_3(x)$ .

- Justifiez théoriquement l'application de la formule de Taylor à l'ordre 3 à la fonction  $\operatorname{arcth}$ . Pour quelles valeurs de  $x$  cette formule est-elle applicable ?
- Déterminez  $\mathcal{P}_3(x)$  et l'erreur  $\mathcal{R}_3(x)$  correspondante.
- Montrez que l'erreur  $|\mathcal{R}_3(x)|$  est inférieure à 0.01 pour tout  $x \in [0, 1/3]$ .
- En remplaçant  $\operatorname{arcth} x$  par  $\mathcal{P}_3(x)$  dans l'équation à résoudre, déterminez une valeur approchée d'une solution de l'équation ( $\heartsuit$ ). Précisez s'il s'agit d'une approximation par excès ou par défaut.

### Question III

On considère le mouvement d'un point matériel P de masse  $m$  glissant sans frottement sur un cerceau vertical de rayon  $a$ . Le cerceau tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical passant par un de ses points noté O (voir dessin). Le point matériel est soumis à la force de pesanteur et à une force  $\mathbf{F} = -m\Omega^2\mathbf{OP}$  dirigée vers le point O.

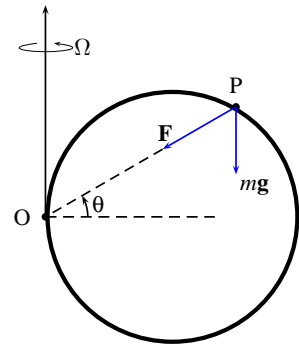
Le mouvement du point sur le cerceau peut être décrit par la fonction potentielle

$$V(\theta) = \frac{n^2}{4} \sin^2(2\theta) + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

où  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  est l'angle entre l'horizontale et le vecteur  $\mathbf{OP}$  et où  $n^2 = a\Omega^2/g$  est un paramètre constant positif ou nul.

Les positions d'équilibre relatif (par rapport au cerceau) du point matériel correspondent aux points stationnaires de  $V$ . Un minimum de  $V$  correspond à une position d'équilibre stable, un maximum de  $V$  ou un point d'inflexion à une position d'équilibre instable.

Déterminez les positions d'équilibre relatif et leur stabilité en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre  $n^2$ .



Question I

i. L'énoncé est vrai.

Les hypothèses sur  $f_1$  et  $f_2$  peuvent se traduire par

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{1/x} = 0$$

Dès lors, puisque les différentes limites existent et sont finies, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{1/x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f_1(x)}{x} + 0 \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

et

$$f_1 + f_2 = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad (x \rightarrow 0)$$

ii. L'énoncé est vrai.

Pour montrer que les primitives considérées sont asymptotiques l'une à l'autre, on considère l'expression

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{\int_{x_0}^x g(t) dt}$$

Celle-ci est cependant indéterminée, du type "0/0", puisque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{x_0}^x g(t) dt = \int_{x_0}^{x_0} g(t) dt = 0$$

Par application de théorème de l'Hospital, on obtient néanmoins

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{\int_{x_0}^x g(t) dt} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right)}{\frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x g(t) dt \right)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

de sorte que

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \sim \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad (x \rightarrow x_0)$$

iii. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple constitué par les fonctions

$$f_1(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad f_2(x) = 1 + x^2$$

D'une part, ces fonctions vérifient les hypothèses puisqu'elles sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x}{1 + x^2} = 1$$

de sorte que  $f_1 \sim f_2$  pour  $x \rightarrow 0$ .

Toute réponse correcte (vrai ou faux) donnée sans justification ne rapporte aucun point.

Traduction des hypothèses en terme de limites : 2 pts

Vérification de la thèse : 2 pts

Conclusion : 1 pt

Total i. : 5 pts

Considération de la limite du quotient des primitives : 1 pt

Identification de la forme indéterminée : 1 pt

Appel à l'Hospital : 1 pt

Connaissance de la relation entre la dérivée de la primitive et la fonction : 1 pt

Conclusion : 1 pt

Total ii. : 5 pts

Contre-exemple correct : 3 pts

Vérification des hypothèses : 1 pt

D'autre part, ces fonctions ne vérifient pas la thèse puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \neq 1$$

de sorte qu'on n'a pas  $f_1' \sim f_2'$  pour  $x \rightarrow 0$ .

iv. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple de la fonction  $f(x) = x + 2$ .

D'une part, cette fonction vérifie l'hypothèse puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$$

de sorte que  $f \sim x + 1$  pour  $x \rightarrow +\infty$ .

D'autre part, cette fonction ne vérifie pas la thèse puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2-x) = 2$$

de sorte que la fonction  $f$  admet en  $+\infty$  l'asymptote oblique d'équation

$$y = x + 2 \neq x + 1$$

Violation de la thèse :  
1 pt

Total iii. : 5 pts

Contre-exemple  
correct : 3 pts

Vérification de l'hy-  
pothèse : 1 pt

Violation de la thèse :  
1 pt

Total iv. : 5 pts

TOTAL QI : 20 PTS

### Question II

i. La fonction  $f(x) = \operatorname{arcth} x$  est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur  $] -1, 1[$ .

On peut donc lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3 pour tout  $x \in ] -1, 1[$  puisqu'elle appartient alors à  $C_3([0, x])$  ou  $[x, 0]$  et est 4 fois dérivable sur  $]0, x[$  ou  $]x, 0[$ .

ii. Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , la formule de Taylor d'ordre 3 s'écrit

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

où  $\xi \in ]0, x[$  (ou  $\xi \in ]x, 0[$  si  $x < 0$ ).

Le calcul des dérivées successives de  $f$  conduit à

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}, \quad f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$$

Dès lors,

$$f(x) = \mathcal{P}_3(x) + \mathcal{R}_3(x)$$

où

$$\mathcal{P}_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$$

et

$$\mathcal{R}_3(x) = x^4 \frac{\xi(\xi^2+1)}{(1-\xi^2)^4}$$

Total i. : 2 pts

Connaissance de la  
formule de Taylor  
(énoncée ou mise en  
pratique) : 3 pts (dont  
1 pt pour l'expression  
du reste et 1 pt pour la  
position de  $\xi$ )

Expression des  
dérivées successives et  
valeurs en 0 : 4 pts

Expression de  $\mathcal{P}_3(x)$  :  
2 pts

Expression de  $\mathcal{R}_3(x)$  :  
1 pt

Total ii. : 10 pts



iii. Pour tout  $x \in [0, 1/3]$ , on a

$$|\mathcal{R}_3(x)| = \left| x^4 \frac{\xi(\xi^2 + 1)}{(1 - \xi^2)^4} \right| = x^4 \frac{\xi(\xi^2 + 1)}{(1 - \xi^2)^4}$$

Les facteurs impliquant le point  $\xi$  inconnu peuvent être majorés en notant que pour  $0 < \xi < x \leq 1/3$ , on a

$$\xi(\xi^2 + 1) < x(x^2 + 1)$$

et

$$(1 - \xi^2)^4 > (1 - x^2)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1 - \xi^2)^4} < \frac{1}{(1 - x^2)^4}$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_3(x)| = x^4 \frac{\xi(\xi^2 + 1)}{(1 - \xi^2)^4} < \frac{x^5(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4}$$

En analysant séparément le numérateur et le dénominateur comme ci-dessus, on observe que le maximum de cette expression sur  $[0, 1/3]$  est réalisé pour  $x = 1/3$ . Dès lors, il vient comme attendu

$$|\mathcal{R}_3(x)| < \frac{(1/3)^5[(1/3)^2 + 1]}{[1 - (1/3)^2]^4} = \frac{15}{2048} < 0.01$$

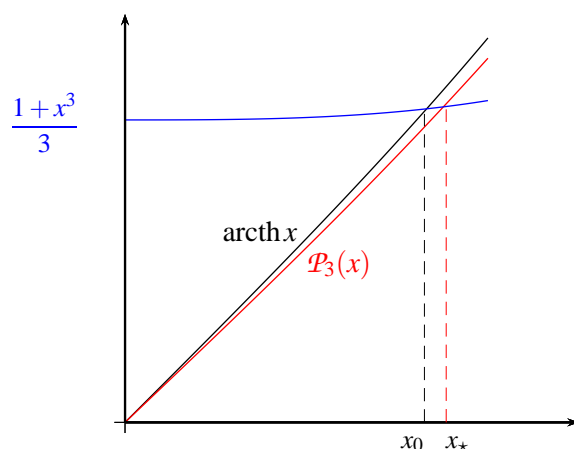
iv. En remplaçant  $f(x)$  par  $\mathcal{P}_3(x)$  dans l'équation ( $\heartsuit$ ), celle-ci devient

$$x + \frac{x^3}{3} = \frac{1 + x^3}{3}$$

La valeur  $x_* = 1/3$  est donc une solution approchée de l'équation ( $\heartsuit$ ).

L'examen de la forme ( $\spadesuit$ ) de l'erreur montre que  $\mathcal{R}_3(x) > 0, \forall x \in ]0, 1[$ . Dès lors,  $\mathcal{P}_3$  constitue une approximation par défaut de  $f$  sur cet intervalle.

L'erreur entre  $f$  et  $\mathcal{P}_3$  est mesurée sur l'axe des ordonnées alors que la question porte sur le positionnement de la solution approchée de l'équation par rapport à la solution exacte. Cette erreur se mesure donc sur l'axe des abscisses. Pour passer de l'un à l'autre, une esquisse des graphiques des fonctions s'impose. La figure ci-dessous donne une image schématique de la situation (en exagérant l'erreur associée à  $\mathcal{P}_3$ ), la solution recherchée  $x_0$  correspondant à l'intersection des graphes des fonctions  $\text{arth}x$  et  $(1 + x^3)/3$ .



Comme le montre ce schéma,  $x_* = 1/3$  est une approximation par excès de la solution exacte  $x_0$ .

Total iii. : 4 pts, dont 1 pt pour le principe de la majoration du reste sur l'intervalle considéré.

Solution approchée : 2 pts

$\mathcal{P}_3 < f$  sur  $]0, 1[$  : 1 pt

Approximation par excès (avec justification) : 1 pt

Total iv. : 4 pts

TOTAL QII : 20 PTS

### Question III

#### A. Identification des points stationnaires de $V$

Par définition, les points stationnaires de  $V$  correspondent aux racines de l'équation

$$0 = V'(\theta) = n^2 \sin 2\theta \cos 2\theta + \cos 2\theta = \cos 2\theta (n^2 \sin 2\theta + 1)$$

- Les zéros de  $V'$  correspondant à l'annulation du facteur  $\cos 2\theta$  dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  sont

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$$

- L'annulation du facteur  $(n^2 \sin 2\theta + 1)$  n'est possible que si  $n^2 \geq 1$ . Les zéros correspondants sont donnés par

$$2\theta = \arcsin\left(-\frac{1}{n^2}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2\theta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{n^2}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  dans lequel les variations de  $\theta$  doivent être étudiées, les seuls points stationnaires à prendre en compte sont

$$\theta_3 = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

*Traduction de l'énoncé en la recherche des zéros de  $V'$  : 1 pt*

*Expression de  $V'$  : 2 pts*

*Identification de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  : 2 pts*

*Identification de  $\theta_3$  et  $\theta_4$  et de la condition d'existence sur  $n$  : 3 pts*

*Total A. : 8 pts*

#### B. Caractérisation des points stationnaires de $V$

La nature des différents points stationnaires peut être déterminée à partir de l'étude des dérivées d'ordres supérieurs de  $V$  en ces points. Calculons donc

$$V''(\theta) = 2n^2 \cos^2 2\theta - 2n^2 \sin^2 2\theta - 2 \sin 2\theta = 2n^2 - 4n^2 \sin^2 2\theta - 2 \sin 2\theta$$

- En  $\theta_1 = \pi/4$ , on a

$$V''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2n^2 - 2 < 0$$

La position  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  correspond donc à un maximum de  $V$  quel que soit  $n$ .

- En  $\theta_2 = -\pi/4$ , on a

$$V''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2n^2 + 2$$

dont le signe dépend de  $n^2$ . Ainsi,

- ◇ si  $n^2 < 1$ ,  $V''(-\pi/4) > 0$  et le point stationnaire est un minimum de  $V$  ;
- ◇ si  $n^2 > 1$ ,  $V''(-\pi/4) < 0$  et le point stationnaire est un maximum de  $V$  ;
- ◇ si  $n^2 = 1$ ,  $V''(-\pi/4) = 0$  et la nature du point stationnaire ne peut pas être déterminée à partir de la seule connaissance de la dérivée seconde en ce point.

- Quand  $n^2 \geq 1$ , il faut encore étudier les positions  $\theta_3$  et  $\theta_4$  pour lesquelles on a  $\sin(2\theta) = -\frac{1}{n^2}$  et

$$V''(\theta) = 2n^2 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^2} = 2\frac{n^4 - 1}{n^2}$$

dont le signe dépend de  $n^2$ . Ainsi,

- ◇ si  $n^2 > 1$ ,  $V''(\theta_3) = V''(\theta_4) > 0$  et les deux points stationnaires sont des minima de  $V$  ;

*Valeur de  $V''$  : 2 pts*

*Nature du point stationnaire en  $\theta_1$  (avec justification) : 2 pts*

*Nature du point stationnaire en  $\theta_2$  pour  $n^2 \neq 1$  (avec justification) : 2 pts*

*Nature des points stationnaires en  $\theta_3$  et  $\theta_4$  pour  $n^2 > 1$  (avec justification) : 2 pts*

- ◇ si  $n^2 = 1$ ,  $V''(\theta_3) = V''(\theta_4) = 0$  et la nature des points stationnaires ne peut pas être déterminée à partir de la seule connaissance de la dérivée seconde en ces points.

Les développements qui précèdent ont permis de déterminer la nature de tous les points stationnaires sauf dans le cas où  $n^2 = 1$ . Ce cas est particulier dans la mesure où on a alors

$$\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = -\frac{\pi}{4}$$

Pour lever l'indétermination associée à l'annulation de la dérivée seconde du potentiel, nous pouvons avoir recours à l'étude des dérivées d'ordres supérieurs. La dérivée troisième n'est pas d'un grand secours dans la mesure où

$$V^{(3)}(\theta) = -16\sin(2\theta)\cos(2\theta) - 4\cos(2\theta) \quad \text{et} \quad V^{(3)}(-\pi/4) = 0$$

La dérivée quatrième donne par contre

$$V^{(4)}(\theta) = -32\cos^2(2\theta) + 32\sin^2(2\theta) + 8\sin(2\theta) \quad \text{et} \quad V^{(4)}(-\pi/4) = 24 > 0$$

La première dérivée non nulle étant d'ordre pair et positive, on en conclut qu'il existe un minimum de  $V$  en  $\theta = -\pi/4$  quand  $n^2 = 1$ .

### C. Conclusions

- i. Si  $n^2 \leq 1$ , le système possède
  - une position d'équilibre relatif stable en  $\theta_2 = -\pi/4$  ;
  - une position d'équilibre relatif instable en  $\theta_1 = \pi/4$ .
- ii. Si  $n^2 > 1$ , le système possède
  - deux positions d'équilibre relatif stable en

$$\theta_3 = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- deux positions d'équilibre relatif instable en  $\theta_1 = \pi/4$  et  $\theta_2 = -\pi/4$ .

On peut remarquer que le comportement du système et la stabilité de la position verticale inférieure,  $\theta_2 = -\pi/4$ , dépendent des actions antagonistes de la pesanteur, qui tend à amener la particule vers le point le plus bas, et de la rotation, qui tend à faire s'écarter la particule de l'axe de rotation par le biais de la force centrifuge. Quand  $n^2 \leq 1$ , *i.e.* quand la vitesse de rotation est faible, la pesanteur domine et l'équilibre est stable en position verticale inférieure. Lorsqu'on dépasse la valeur pivot  $n^2 = 1$ , la rotation devient dominante, la position verticale basse devient instable et les nouvelles positions d'équilibre stable en  $\theta_3$  et  $\theta_4$  apparaissent plus haut sur le cercle.

*Cas particulier  $n^2 = 1$  :  
2 pts*

*Total B. : 10 pts*

*Rem. La nature des points stationnaires pourrait aussi être étudiée par d'autres méthodes, sans pénalisation.*

*Total C : 2 pts*

*(dont 1 pt pour le lien entre la nature des points stationnaires et des positions d'équilibre)*

**TOTAL QIII : 20 PTS**

## COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Quelle que soit la question posée, il ne faut pas se contenter d'indiquer une suite de calculs mais il faut aussi expliquer pourquoi on fait ces calculs et quelles conclusions on peut en tirer.

### Question I

- Il faut toujours répondre sans ambiguïté à la question posée. Il fallait ici, en plus des démonstrations réalisées, mentionner clairement si la proposition était vraie ou fausse.
- Rappelons qu'un exemple ne constitue jamais une démonstration de la validité d'un énoncé. Un contre-exemple constitue par contre la meilleure façon de démontrer qu'un énoncé est faux. Il faut dans ce cas toujours montrer que ce contre-exemple vérifie les hypothèses de l'énoncé et qu'il en contredit la thèse.
- Il ne faut pas confondre les notations  $\sim$  et  $=$ . Le fait que  $f(x) \sim g(x)$  pour  $x \rightarrow x_0$  ne veut pas dire que  $f(x) = g(x)$  pour  $x \rightarrow x_0$  ni, par exemple, que les fonctions possèdent automatiquement les mêmes dérivées ou primitives dans ce voisinage.

i. /

ii. /

- iii. Le théorème de l'Hospital ne pouvait servir à justifier la proposition. Sous des hypothèses appropriées de régularité des fonctions  $f$  et  $g$ , ce théorème s'écrit

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = M \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M$$

Ceci ne permet en aucune façon de justifier la proposition, quasiment réciproque,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

dont le contre-exemple présenté dans la solution-type prouve qu'elle est fausse.

- iv. L'information apportée par la connaissance d'une asymptote oblique est plus riche que celle associée au comportement asymptotique à l'infini.

Le comportement asymptotique ne caractérise que le terme dominant du comportement de la fonction. Si  $f(x) \sim x + 1$  pour  $x \rightarrow +\infty$ , seul le terme  $x$  est significatif. On peut tout aussi bien écrire, pour la même fonction  $f$ ,

$$f(x) \sim x, (x \rightarrow +\infty), f(x) \sim x + 2, (x \rightarrow +\infty) \text{ ou } f(x) \sim x + \sqrt{x}, (x \rightarrow +\infty)$$

Sur base de  $f(x) \sim x + 1$ , on ne peut aller au-delà de la conclusion

$$f(x) = x + o(x), \quad (x \rightarrow +\infty)$$

La connaissance de l'asymptote oblique apporte quant à elle plus de précision sur le comportement de la fonction à l'infini. Si la fonction  $f$  possède l'asymptote oblique d'équation  $y = x + 1$  en  $+\infty$ , on a

$$f(x) = x + 1 + o(1), \quad (x \rightarrow +\infty)$$



## Question II

Beaucoup ont vu une définition de la fonction arcth dans la relation

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1+x^3}{3}$$

Il n'en est rien. Cette expression constitue une équation pour l'inconnue  $x$  dont on cherche à déterminer une valeur approchée en remplaçant la fonction arcth par son polynôme de Taylor de degré 3 au voisinage de zéro.

Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3 au polynôme  $(1+x^3)/3$  au voisinage de 0 n'a aucun intérêt puisque cette formule rendrait le polynôme lui-même avec un reste identiquement nul quelle que soit la valeur de  $x$ .

- i. Justifier théoriquement l'application de la formule de Taylor à l'ordre 3 à la fonction arcth consiste à vérifier que la fonction arcth remplit les hypothèses de cette formule en particulier les hypothèses générales de la formule de Taylor au cas de la fonction, du voisinage et de l'ordre considérés. Sur base de cette analyse, on peut déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles la formule est applicable.

Il n'était absolument pas demandé de justifier pourquoi l'ordre 3 était l'ordre choisi.

- ii. • La formule de Taylor permet d'écrire

$$\operatorname{arcth} x = \mathcal{P}_3(x) + \mathcal{R}_3(x)$$

où

$$\mathcal{P}_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$$

est un polynôme de degré 3. On n'a donc pas, contrairement à ce qui a été lu dans de très nombreuses copies,

$$\mathcal{P}_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{R}_3(x) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^4), \quad (x \rightarrow 0)$$

L'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{R}_3(x) = \operatorname{arcth} x - \mathcal{P}_3(x)$$

- L'expression du reste de la formule de Taylor est ici

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{x^4}{4!} \left[ \frac{24\xi(\xi^2+1)}{(1-\xi^2)^4} \right]$$

où  $\xi \in ]0, x[$  (ou  $\xi \in ]x, 0[$  si  $x < 0$ ). La dérivée quatrième intervenant dans ce reste est évaluée en un point  $\xi$  inconnu et dépendant de  $x$ . Elle n'est pas évaluée en 0, ni en  $x$ .

- iii. • La majoration du reste consiste à estimer la plus grande valeur que celui-ci peut prendre dans l'intervalle considéré afin d'avoir une idée de la borne supérieure de l'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor.

Il est nécessaire de procéder en deux temps. Premièrement, il faut majorer la fonction de  $\xi$  sur  $]0, x[$ . Ensuite, il faut majorer le reste en fonction de  $x$  sur  $[0, 1/3]$ . Quand la fonction à majorer s'exprime au moyen d'une fraction, une majoration peut être obtenue en donnant la plus grande valeur possible au numérateur et la plus petite au dénominateur (supposés positifs), ce qui peut se produire pour des valeurs de  $x$  (ou  $\xi$ ) différentes.

Remarquons qu'il ne suffit pas d'envisager les bornes de l'intervalle de variation de  $x$  (ou  $\xi$ ). Le reste pourrait prendre sa plus grande valeur en un point à l'intérieur de cet intervalle.

- La fonction  $\operatorname{arcth}$  étant impaire, toutes ses dérivées d'ordre pair sont nulles en zéro. Si on applique la formule de Taylor à l'ordre 4 à la fonction  $\operatorname{arcth}$ , on obtient dès lors  $\mathcal{P}_4(x) = \mathcal{P}_3(x) = x + x^3/3$  puisque le terme en  $x^4$  de  $\mathcal{P}_4(x)$  est nul. Dans cet exercice, il était donc possible (mais pas demandé) d'obtenir une évaluation plus précise de l'erreur associée à  $x + x^3/3$  en considérant le reste  $\mathcal{R}_4(x)$ ,

iv. L'erreur  $\mathcal{R}_3(x)$  étant strictement positive pour tout  $x \in ]0, 1[$ , il est clair que  $\mathcal{P}_3$  constitue une approximation par défaut de  $\operatorname{arcth}$  sur cet intervalle.

Ce n'était cependant pas ce qui était demandé ici. On s'intéressait par contre au positionnement de la solution exacte  $x_0$  vérifiant

$$\operatorname{arcth} x_0 = \frac{1 + x_0^3}{3}$$

par rapport à la solution approchée  $x_* = 1/3$  vérifiant

$$x_* + \frac{x_*^3}{3} = \frac{1 + x_*^3}{3}$$

Un petit raisonnement graphique, comme celui réalisé dans la solution-type, permettait de déduire ce positionnement en se basant sur le fait que la fonction  $\operatorname{arcth}$  se trouve au-dessus de son polynôme de Taylor (puisque le reste est positif).

### Question III

- Quand un paramètre intervient dans un exercice, il ne faut pas discuter arbitrairement sur les valeurs de celui-ci. Si une discussion est nécessaire, elle apparaît naturellement en cours de résolution quand une solution obtenue n'existe pas, qu'une manipulation réalisée n'est pas permise ou que la solution est fondamentalement différente pour certaines valeurs du paramètre. Ici, les points stationnaires correspondant à  $\sin 2\theta = -1/n^2$  n'existent que si  $n^2 \geq 1$ . Ils coïncident avec  $\theta = -\pi/4$  si  $n^2 = 1$ . Plus loin, la détermination de la nature du point stationnaire  $\theta = -\pi/4$  ne peut pas être réalisée en se basant sur  $V''(-\pi/4)$  si  $n^2 = 1$ . Ces considérations amènent à distinguer les cas  $n^2 < 1$ ,  $n^2 > 1$  et  $n^2 = 1$ .

Tout exercice faisant intervenir un paramètre doit également comporter une conclusion reprenant les résultats obtenus pour les différentes valeurs du paramètre.

- Les manipulations des fonctions trigonométriques doivent être maîtrisées. Trop d'erreurs de calcul sont constatées. En particulier, la dérivation de  $\sin 2\theta$  par rapport à  $\theta$  donne  $2 \cos 2\theta$  et pas  $\cos 2\theta$ . La détermination des solutions de  $\sin 2\theta = -1/n^2$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  ne devrait pas non plus poser de problème (voir solution-type).
- Dans le cas d'une fonction faisant intervenir un paramètre, la détermination de la nature des points stationnaires sur base d'un tableau de signe de la dérivée première est généralement assez ardue. La méthode basée sur la détermination de la première dérivée non nulle de la fonction en chacun des points stationnaires est par contre bien mieux adaptée. Rappelons que, si cette dérivée est d'ordre impair, il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale et que, si elle est d'ordre pair, ce sera un minimum si elle est positive et un maximum si elle est négative.
- La solution de tout problème doit comporter une "phrase réponse" reprenant les termes de l'énoncé. Ici, il ne fallait pas se contenter de donner les points stationnaires et leur nature. Il fallait encore relier ces résultats aux positions d'équilibre et à leur stabilité.