Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2018

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***23 octobre****.*

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez lisiblement votre nom en* **MAJUSCULES** *suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

Sachant que

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4), \qquad (x \to 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

déterminez les constantes α, β et γ telles que

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

Question II

On se propose d'évaluer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(1 + \mathrm{e}^x)\,dx$$

en approchant l'intégrand par la formule de MacLaurin.

i. Appliquez la formule de MacLaurin à l'ordre deux à la fonction $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ et déterminez ainsi une approximation polynomiale $\mathcal{P}_2(x)$ de cette fonction ainsi que l'expression du reste $\mathcal{R}_2(x)$ correspondant. Pour quelles valeurs de x ces résultats sont-ils valables ?

ii. Montrez que, pour tout $x \in [0,1]$, le reste $\mathcal{R}_2(x)$ est, en valeur absolue, inférieur à 0.1.

iii. En exploitant les résultats précédents, déterminez une valeur approchée $\tilde{I}$ de I.

iv. Déterminez une borne aussi précise que possible de l'erreur associée à $\tilde{I}$. Précisez si $\tilde{I}$ constitue une approximation par excès ou par défaut de I .

Question III

i. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_0$, peut-on en déduire que $f(x) = a + O(x - x_0)$, $(x \to x_0)$? Justifiez.

ii. Si la fonction complexe f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, peut-on assurer l'existence d'un $\xi \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$? Justifiez.

iii. Si la fonction $f \in C_2(\mathbb{R})$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f''(x_0) = 0$, peut-on en déduire que la dérivée seconde de f^{-1} (fonction réciproque de f) s'annule en $f(x_0)$? Justifiez.

Question I

L'expression proposée peut s'écrire sous la forme

Écriture sous la forme $1/(1-y)$: 1 pt

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{1-(1-\operatorname{ch} x)} = \frac{1}{1-y} \qquad \text{en posant } y = 1-\operatorname{ch} x$$

Dès lors, puisque $y = (1-\operatorname{ch} x) \to 0$ pour $x \to 0$, on a

Comportement en fonction de y : 1 pt

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+O(y^3), \qquad (y \to 0)$$

Par ailleurs, exploitant le développement de MacLaurin de la fonction ch, on a

Comp. asymptotique de y : 1 pt

$$y = 1-\operatorname{ch} x = 1-\left[1+\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right] = -\frac{x^2}{2}+O(x^4), \qquad (x \to 0)$$

de sorte que, puisque $y = O(x^2)$,

Résultat final : 2 pts

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch} x} &= 1+\left[-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right]+\left[-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right]^2+O(x^6)\\ &= 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4), \qquad (x \to 0)\end{aligned}$$

On en déduit, comme annoncé, que

Identification des valeurs de α, β et γ : 1 pt

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \alpha+\beta x+\gamma x^2+O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = -1/2$.

OU

De façon alternative, en exploitant le développement de MacLaurin de la fonction ch, l'expression proposée peut s'écrire, pour $(x \to 0)$, sous la forme

Exploitation du comp. asymptotique de ch : 1 pt

Écriture sous la forme $1/(1-y)$: 1 pt

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+O(x^4)} = \frac{1}{1-y}, \qquad \text{en posant } y = -\frac{x^2}{2}+O(x^4)$$

Dès lors, puisque $y \to 0$ et $y = O(x^2)$ pour $x \to 0$, on a

Comportement en fonction de y : 1 pt

Résultat final : 2 pts

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch} x} &= \frac{1}{1-y}\\ &= 1+y+y^2+O(y^3), \qquad (y \to 0)\\ &= 1+\left[-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right]+\left[-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right]^2+O(x^6), \qquad (x \to 0)\\ &= 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4), \qquad (x \to 0)\end{aligned}$$

On en déduit, comme annoncé, que

Identification des valeurs de α, β et γ : 1 pt

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \alpha+\beta x+\gamma x^2+O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = -1/2$.

TOTAL Q1 : 6 PTS

Question II

Hypothèses générales de la formule de Taylor : 1 pt

i. La formule de Taylor peut être appliquée à l'ordre 2 sur un intervalle $[0,x]$ (resp. $[x,0]$) à toute fonction f réelle, appartenant à $C_2([0,x])$ (resp. à $C_2([x,0])$ et 3 fois dérivable sur $]0,x[$ (resp. $]x,0[$).

Particularisation à $\ln(1+e^x)$ et identification de l'intervalle de validité : 1 pt

La fonction $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor proposée est donc applicable sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ et l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ au voisinage de l'origine sont respectivement définis par

Connaissance de l'expression générale de $\mathcal{P}_2$: 1 pt

$$\mathcal{P}_2(x) \;=\; f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)$$

et

Connaissance de l'expression générale de $\mathcal{R}_2$: 1 pt

$$\mathcal{R}_2(x)=\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(\xi)$$

où ξ appartient à $]0,x[$ (resp. $]x,0[$).

Information sur ξ : 1 pt

Pour la fonction $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$, il vient successivement $f(0)=\ln 2$ et

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} & f'(0)&=\frac{1}{2}\\
f''(y)&=\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} & f''(0)&=\frac{1}{4}\\
f^{(3)}(y)&=\frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} & f^{(3)}(\xi)&=\frac{\mathrm{e}^\xi(1-\mathrm{e}^\xi)}{(1+\mathrm{e}^\xi)^3}
\end{aligned}$$

de sorte que

Mise en oeuvre et résultat : 3 pts

$$\mathcal{P}_2(x)=\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}_2(x)=\frac{x^3}{6}\frac{\mathrm{e}^\xi(1-\mathrm{e}^\xi)}{(1+\mathrm{e}^\xi)^3}$$

où ξ appartient à $]0,x[$ (resp. $]x,0[$).

Total i : 8 pts

ii. Il découle de ce qui précède que

$$|\mathcal{R}_2(x)|=\frac{1}{6}\left|x^3\right|\left|\frac{\mathrm{e}^\xi(1-\mathrm{e}^\xi)}{(1+\mathrm{e}^\xi)^3}\right|=\frac{1}{6}\frac{\mathrm{e}^\xi}{(1+\mathrm{e}^\xi)^3}\left|x^3\right|\;\left|1-\mathrm{e}^\xi\right|$$

Puisque x appartient à l'intervalle $[0,1]$, $\xi\in]0,1[$ et

$$|x|^3\le 1\;,\mathrm{e}^\xi<\mathrm{e}\;,|1-\mathrm{e}^\xi|=\mathrm{e}^\xi-1<\mathrm{e}-1 \text{ et } 1+\mathrm{e}^\xi>2$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)|\le\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{6\cdot 2^3}\approx 0.097<0.1 \tag{†}$$

Total ii : 4 pts (dont 1 pt pour $\xi\in]0,1[$)

iii. Approchant l'intégrand par $\mathcal{P}_2(x)$, on obtient aisément,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}=\int_0^1\mathcal{P}_2(x)\,dx&=\int_0^1\left[\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\right]dx\\
&=\left[x\ln 2+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\
&=\ln 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\approx 0.985
\end{aligned}$$

Total iii : 2 pts

iv. Exploitant les résultats précédents, on a

$$I - \tilde{I} = \int_0^1 \left[f(x) - \mathcal{P}_2(x)\right] dx = \int_0^1 \mathcal{R}_2(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x^3}{6} \frac{e^{\xi}(1-e^{\xi})}{(1+e^{\xi})^3}\, dx < 0$$

Expression de $I - \tilde{I}$ en fonction de $\mathcal{R}_2$: 1 pt

puisque l'intégrand est négatif sur $[0,1]$. La valeur approchée $\tilde{I}$ constitue donc une approximation par excès de I.

Valeur par excès : 1 pt

L'erreur associée à $\tilde{I}$ est majorée par

$$\left|I - \tilde{I}\right| = \left|\int_0^1 \mathcal{R}_2(x)\, dx\right| \le \int_0^1 |\mathcal{R}_2(x)|\, dx$$

Vu la majoration (†) obtenue en ii., on a donc

Majoration simple : 2 pts

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \int_0^1 \frac{e(e-1)}{6 \cdot 2^3}\, dx = \frac{e(e-1)}{48} \approx 0.097$$

Cette estimation de l'erreur peut être améliorée en reprenant le raisonnement suivi en ii. sans majorer le facteur x^3, *i.e.*

$$|\mathcal{R}_2(x)| \le \frac{e(e-1)}{6 \cdot 2^3} x^3$$

On a alors

Majoration raffinée : 2 pts

$$\left|I - \tilde{I}\right| \le \int_0^1 \frac{e(e-1)}{6 \cdot 2^3} x^3\, dx = \frac{e(e-1)}{48} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{e(e-1)}{192} \approx 0.024$$

Total iv : 6 pts

TOTAL Q2 : 20 PTS

Question III

Toute réponse par VRAI ou FAUX, même correcte, donnée sans justification ne donne droit à aucun point.

i. L'implication proposée est fausse, de $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_0$, on ne peut déduire que $f(x) = a + O(x - x_0)$, $(x \to x_0)$.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la fonction

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

Cette fonction est bien telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}_0$. Mais

$$\sqrt{x} \ne O(x), \qquad (x \to 0)$$

Contre-exemple correct : 1 pt

Vérification des hypothèses : 1 pt

Négation de la proposition : 1 pt

Total i. : 3 pts

ii. Le théorème des accroissements finis ne peut être généralisé aux fonctions à valeurs complexes comme proposé.

(L'étudiant qui répond seulement que le théorème des accroissements finis demande f réelle reçoit 1 pt.)

Pour le voir, on peut considérer la fonction

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \in C_1([0, 2\pi])$$

Contre-exemple correct : 1 pt

L'énoncé proposé conduirait à assurer l'existence d'un $\xi \in]0, 2\pi[$ tel que

$$f(2\pi) - f(0) = (2\pi - 0) f'(\xi) \qquad \text{soit} \qquad 0 = 2\pi f'(\xi)$$

Vérification des hypothèses : 1 pt

et

$$0 = f'(\xi) = -\sin\xi + i\cos\xi$$

Or, puisque les fonctions sin et cos ne s'annulent pas simultanément, un tel ξ n'existe pas et l'énoncé proposé doit donc être rejeté.

Négation de la proposition : 1 pt

Total ii. : 3 pts

iii. Les conditions énoncées ne permettent pas de garantir l'existence de la dérivée première de la fonction réciproque. La dérivée seconde de f^{-1} peut donc ne pas être définie de sorte qu'on ne peut en déduire a fortiori son annulation en $f(x_0)$ si $f''(x_0) = 0$.

Négation de la proposition : 1 pt

Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction $f(x) = x^3 \in \mathbb{C}_2(\mathbb{R})$ et $x_0 = 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f''(x_0) = 0$. La fonction réciproque f^{-1} peut être définie sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en $f(x_0) = 0$ puisque

Vérification des hypothèses : 1 pt

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Contre-exemple correct : 1 pt

et le graphique de f^{-1} présente une tangente verticale à l'origine.

Total iii. : 3 pts

Remarques.

- *Si $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $f''(x_0) = 0$ entraîne l'annulation de la dérivée seconde de f^{-1} en $f(x_0)$. L'étudiant qui démontre ce résultat parfaitement en calculant la dérivée seconde de f^{-1} reçoit 2 pts.*
- *Du seul fait de l'annulation de f'', on ne peut déduire l'existence d'un point d'inflexion dans le graphique de f''. Ceci permettrait de s'appuyer sur une interprétation graphique et de conclure… Cependant, sans utiliser d'autre hypothèse, ceci est faux et l'étudiant qui s'appuie sur ceci a 1 pt.*

QUESTION III : 9 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

Comme indiqué dans l'énoncé, il était attendu d'utiliser les développements asymptotiques connus de $\operatorname{ch} x$ et $1/(1-x)$ au voisinage de $x = 0$ pour déterminer celui de $1/\operatorname{ch} x$. Il est évidemment possible d'établir ce développement asymptotique par application de la formule de Taylor à la fonction $1/\operatorname{ch} x$, mais telle n'était pas la question. Lorsque la méthode de résolution est imposée dans l'énoncé, l'étudiant qui utilise une approche différente ne répond pas formellement à la question posée et est donc sanctionné, même si la réponse finale est correcte.

- Quand on exprime un comportement asymptotique, il faut préciser systématiquement dans quel voisinage on considère les fonctions en faisant apparaître l'expression $(x \to x_0)$ appropriée.
- Quand on utilise un comportement asymptotique valable pour $y \to y_0$ en remplaçant y par une expression plus compliquée fonction de x afin d'obtenir un comportement asymptotique pour $x \to x_0$, il est indispensable de vérifier que $y \to y_0$ si $x \to x_0$. Ici, il fallait vérifier que $(1 - \operatorname{ch} x) \to 0$ si $x \to 0$ pour pouvoir utiliser le comportement asymptotique donné de $1/(1-y)$ en $y = 1 - \operatorname{ch} x$.

Question II

i. - Pour appliquer la formule de Taylor, il faut en vérifier les hypothèses. Pour bien organiser son raisonnement, il convient de commencer par énoncer les hypothèses générales de la formule de Taylor à l'ordre considéré (en précisant donc l'ordre n par rapport à l'énoncé général présenté dans les notes de cours) puis de particulariser à la fonction en jeu. C'est l'examen des hypothèses qui nous renseigne sur le domaine de validité des expressions obtenues.
   - Le reste $\mathcal{R}_2(x)$ de la formule de Taylor fait intervenir la dérivée troisième de la fonction évaluée en un point inconnu $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$ si $x < 0$). La formule de Taylor n'est pas valable si on évalue cette dérivée en un point x quelconque ou en $x = 0$.

ii. Le principe de la majoration du reste est de donner à x et ξ les valeurs permises qui donnent en valeur absolue la plus grande valeur possible au reste. Quand un facteur intervenant dans l'expression du reste est une fraction, il convient donc de déterminer la borne supérieure de son numérateur et la borne inférieure de son dénominateur.

iii. La valeur approchée de l'intégrale s'obtient en remplaçant la fonction à intégrer par le polynôme $\mathcal{P}_2(x)$. Il ne faut pas intégrer le reste dont l'expression en fonction de x est par ailleurs inconnue puisque $\xi = \xi(x)$... L'intérêt de la méthode est justement d'obtenir une expression facilement intégrable en remplaçant une fonction compliquée par un polynôme.

iv. - Une borne de l'erreur d'intégration peut être obtenue en utilisant la majoration du reste obtenue plus haut. Le reste constituant l'écart entre la fonction à intégrer et le polynôme effectivement intégré, l'erreur sur la valeur de l'intégrale est donnée par l'intégrale du reste. Une majoration de cette erreur peut donc être trouvée en intégrant la borne supérieure du reste trouvée plus haut. Il est à remarquer que, le reste étant négatif, la valeur obtenue pour l'intégrale du polynôme est supérieure à la valeur réelle, ce qui constitue une approximation par excès.
   - Il y a moyen d'obtenir une évaluation plus précise de l'erreur sur l'intégrale en ne majorant que la partie du reste inconnue, c'est-à-dire celle qui dépend de ξ, et en intégrant le facteur x^3.

Question III

i. La notion de "au plus de l'ordre de" semble mal comprise par la grande majorité des étudiants. De $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_0$, on peut déduire que $f(x) - a$ tend vers zéro si x tend vers x_0 mais pas que

$$f(x) - a = O(x - x_0), \qquad (x \to x_0)$$

En effet, comme le montre le contre-exemple donné dans la solution-type, $f(x) - a$ peut tendre vers 0 moins rapidement que $x - x_0$.

ii. On ne peut pas justifier qu'une propriété est fausse parce qu'elle ne vérifie pas les hypothèses d'un théorème connu. Pour démontrer qu'un énoncé est faux, il faut trouver un contre-exemple qui remplit les hypothèses et nie la thèse. Ici, il ne fallait certainement pas se contenter de dire que la fonction doit être réelle pour pouvoir lui appliquer le théorème des accroissements finis.

Rappelons que, pour prouver qu'un énoncé est correct, il est par contre indispensable d'en donner une démonstration complète et rigoureuse. Un exemple qui vérifie les hypothèses et la thèse ne démontre rien. Étudier quelques exemples peut cependant s'avérer utile pour comprendre le problème et orienter la démonstration générale.

iii.
- Si une fonction f est strictement croissante, on peut seulement en déduire que $f' \geq 0$, pas que $f' > 0$. La dérivée de f pouvait donc s'annuler dans cette question. Il n'était alors pas possible d'utiliser le théorème de dérivation des fonctions réciproques puisqu'une de ses l'hypothèses n'était pas vérifiée. Il faut toujours vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés, particulièrement lorsqu'on mène des raisonnements abstraits.
- La fonction réciproque f^{-1} de $f(x)$ doit être évaluée en $y = f(x)$ et pas en x. En particulier ici, on demandait de vérifier si

$$\frac{d^2 f^{-1}}{dy^2}[f(x_0)] = 0$$

et pas si

$$\frac{d^2 f^{-1}}{dy^2}(x_0) = 0$$