LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2020

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul·e, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

Dans le contexte de l'enseignement à distance et du télétravail, il n'est malheureusement pas possible de corriger les copies individuelles. Il est cependant important que vous vous entraîniez à rédiger entièrement les solutions. Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur `www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`.

Vous devriez réaliser cette évaluation formative pour le ***lundi 23 novembre****, date à laquelle une solution type sera publiée. Une séance en direct sera organisée via Blackboard-Collaborate à une date ultérieure pour que vous puissiez discuter de votre approche des différentes questions.*

Question I

On considère le problème différentiel

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = [f(x) - f'(x)]\,\mathrm{e}^{-x}$$

où $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 0$ et où $f \in C_1(\mathbb{R})$.

i. Justifiez l'existence d'une solution unique $y \in C_3(\mathbb{R})$.
ii. Déterminez une intégrale première.
iii. Dans le cas où $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   (a) résolvez complètement le problème ;
   (b) déterminez des comportements asymptotiques de $y(x)$ pour $x \to 0$ et $x \to +\infty$.

Question II

Le circuit primaire de refroidissement d'une centrale nucléaire fonctionne en faisant circuler de l'eau froide à la température T_{in} dans le coeur de la centrale. En supposant que la température T du coeur est uniforme, l'évolution temporelle de T est décrite par

$$\frac{dT}{dt} + \beta q(T - T_{in}) = 0$$

où q et β sont des constantes non nulles décrivant respectivement le débit d'eau dans le circuit de refroidissement et le coefficient d'échange thermique entre le coeur du réacteur et le circuit primaire de refroidissement.

Si la température initiale (en $t = 0$) du coeur est T_0, calculez $T(t)$ dans chacun des cas suivants.

i. La température de l'eau du circuit de refroidissement est égale à une constante $T_{in} \neq T_0$.
ii. La température de l'eau du circuit de refroidissement varie en fonction de t selon une loi $T_{in}(t)$ connue telle que $T_{in} \in C_0(\mathbb{R})$.

Question I

On considère le problème différentiel

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = [f(x) - f'(x)]\,\mathrm{e}^{-x}$$

où $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 0$ et où $f \in C_1(\mathbb{R})$.

i. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles linéaires assure l'existence de solutions $C_3(\mathbb{R})$ puisque l'équation d'ordre 3 est linéaire et que les coefficients et le terme indépendant sont continus sur $\mathbb{R}$.

L'équation est du troisième ordre et assortie de conditions auxiliaires fixant les valeurs de y, y' et y'' en $x = 0$. Ces conditions sont des conditions de Cauchy, de sorte que la solution du problème différentiel est unique.

Appel au théorème : 1 pt
Hypothèses de linéarité et continuité : 2 pts
Conditions de Cauchy en nombre suffisant : 1 pt
Total i. : 4 pts

ii. L'équation différentielle

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = [f(x) - f'(x)]\,\mathrm{e}^{-x}$$

peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}[y''(x) + 2y'(x) + y(x)] = \frac{d}{dx}[-f(x)\,\mathrm{e}^{-x}]$$

de sorte que

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -f(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C$$

où C est une constante. En utilisant les conditions initiales, on a

$$C = y''(x) + 2y'(x) + y(x) + f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\big|_{x=0} = 0 + 2\cdot 0 + 0 + f(0) = f(0)$$

Intégrale première avec constante : 2 pts

L'intégrale première recherchée s'écrit donc

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -f(x)\,\mathrm{e}^{-x} + f(0)$$

Détermination de la constante : 1 pt

Total ii. : 3 pts

iii. (a) Si $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation à résoudre est

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

Structure justifiée par la linéarité : 2 pts

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique : 1 pt

$$\mathcal{L}(z) = z^3 + 2z^2 + z = z(z^2 + 2z + 1) = z(z+1)^2$$

Zéros du polynôme caractéristique : 1 pt

Celui-ci admet le zéro simple $z_1 = 0$ et le zéro double $z_2 = -1$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = A + (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Solution générale y_h : 2 pts

où A, B et C sont des constantes.
L'équation étant linéaire à coefficients constants et son terme indépendant de la forme exponentielle-polynôme, on peut rechercher une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_p(x) = Ex^2\,\mathrm{e}^{-x}$ où le facteur x^2 tient compte du fait que le coefficient de la variable x dans l'exponentielle est un zéro double du polynôme caractéristique de l'équation homogène correspondante.
La constante E peut être déterminée en substituant $y_p(x) = Ex^2\,\mathrm{e}^{-x}$ dans l'équation non homogène. On a

Mise en oeuvre d'une méthode appropriée : 2 pts

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= -x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2xE\,\mathrm{e}^{-x}\\
y_p''(x) &= x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 2xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x} - 2xE\,\mathrm{e}^{-x} = x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 4xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x}\\
y_p'''(x) &= -x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2xE\,\mathrm{e}^{-x} - 4E\,\mathrm{e}^{-x} + 4xE\,\mathrm{e}^{-x} - 2E\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= -x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 6xE\,\mathrm{e}^{-x} - 6E\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

de sorte que, en substituant dans l'équation différentielle, il vient

$$\begin{aligned}
-x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 6xE\,\mathrm{e}^{-x} - 6E\,\mathrm{e}^{-x} + 2(x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 4xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x})&\\
- x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2xE\,\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

soit

$$-2E\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

ce qui donne $E = -1/2$.
La solution particulière trouvée s'écrit alors

Solution particulière : 2 pts

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

et la solution générale de l'équation non homogène

$$y(x) = A + (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes A, B et C.
On calcule successivement

$$\begin{aligned}
&y(x) = A + (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}; \quad y(0) = A + C\\
&y'(x) = (B - Bx - C)\,\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}; \quad y'(0) = B - C\\
&y''(x) = -B\,\mathrm{e}^{-x} - (B - Bx - C)\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}; \quad y''(0) = -2B + C - 1
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{cases} A + C = 0\\ B - C = 0\\ 2B + C - 1 = 0\end{cases}$$

soit $A = -B = -C = 1$
Finalement, la solution du problème s'écrit

Détermination des constantes : 2 pts

$$y(x) = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Solution du problème : 1 pt

Total iii(a) : 13 pts

De façon alternative, on peut aussi déterminer la solution du problème à partir de l'intégrale première obtenue en ii. en particularisant celle-ci au cas où $f(x) = 1$, soit

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

Même répartition des points pour la méthode alternative

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

Structure justifiée par la linéarité : 2 pts

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

Polynôme caractéristique : 1 pt

Celui-ci admet le zéro double $z = -1$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

Zéro du polynôme caractéristique : 1 pt

$$y_h(x) = (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où B et C sont des constantes.

Solution générale y_h : 2 pts

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

où $y_{p1}(x)$ et $y_{p2}(x)$ sont respectivement des solutions particulières de

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = F(x)$$

associées à

$$F_1(x) = 1 \quad \text{et} \quad F_2(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$$

Mise en oeuvre d'une méthode appropriée : 2 pts

Une solution particulière relative à $F_1(x)$ s'identifie par simple inspection de l'équation, soit

$$y_{p1}(x) = 1$$

Par ailleurs, l'équation étant linéaire à coefficients constants et le second membre $F_2(x)$ de la forme exponentielle-polynôme, on peut rechercher une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_{p2}(x) = Ex^2\,\mathrm{e}^{-x}$ où le facteur x^2 tient compte du fait que le coefficient de la variable x dans l'exponentielle est un zéro double du polynôme caractéristique de l'équation homogène correspondante. La constante E peut être déterminée en substituant $y_{p2}(x) = Ex^2\,\mathrm{e}^{-x}$ dans l'équation non homogène

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$$

On a

$$\begin{aligned}
y'_{p2}(x) &= -x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2xE\,\mathrm{e}^{-x} \\
y''_{p2}(x) &= x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 2xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x} - 2xE\,\mathrm{e}^{-x} = x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 4xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

de sorte que, en substituant dans l'équation différentielle,

$$x^2E\,\mathrm{e}^{-x} - 4xE\,\mathrm{e}^{-x} + 2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2(-x^2E\,\mathrm{e}^{-x} + 2xE\,\mathrm{e}^{-x}) + Ex^2\,\mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-x}$$

soit

$$2E\,\mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-x}$$

ce qui donne $E = -1/2$ et

$$y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

La solution particulière trouvée s'écrit alors

$$y_p(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

et la solution générale de l'équation non homogène

Solution particulière : 2 pts

$$y(x) = (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes B et C. On calcule successivement

Détermination des constantes : 2 pts

$$y(x) = (Bx + C)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}; \quad y(0) = C + 1$$
$$y'(x) = (B - Bx - C)\,\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}; \quad y'(0) = B - C$$

de sorte que

$$\begin{cases} C + 1 = 0 \\ B - C = 0 \end{cases}$$

soit $B = C = -1$

Finalement,la solution du problème s'écrit

Solution du problème : 1 pt

$$y(x) = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Total iii(a), version alternative : 13 pts

(b) On a

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1$$

de sorte que

Comportement asymptotique à l'infini : 1 pt

$$y(x) \sim 1, \quad (x \to +\infty)$$

Par contre

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0$$

et on ne peut déduire aucun comportement asymptotique de cette limite.

Cependant, la formule de Taylor appliquée à la solution $y \in C_4(\mathbb{R})$ déterminée au point (a) permet d'écrire

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{6} + O(x^4), \quad (x \to 0)$$

où $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 0$ et où l'équation différentielle évaluée en $x = 0$ permet de calculer

$$y'''(0) = -2y''(0) - y'(0) + 1 = 1$$

Dès lors, on a

Comportement asymptotique en zéro : 3 pts

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + O(x^4), \quad (x \to 0)$$

ou

$$y(x) \sim \frac{x^3}{6}, \quad (x \to 0)$$

Remarquons que ce résultat ne demande en réalité pas de résoudre l'équation différentielle. Le caractère 4 fois continûment dérivable de la fonction y est bien acquis puisque le théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation linéaire assure que $y \in C_3(\mathbb{R})$ et que, de plus,

$$y'''(x) = -2y''(x) - y'(x) + \mathrm{e}^{-x} \quad \in C_1(\mathbb{R})$$

De façon alternative, en utilisant le développement de Mac Laurin de la fonction e^{-x}

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4), \ (x \to 0)$$

on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) \\ &= (1-1) - (x - x) - \left(\frac{x^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + O(x^4), \quad (x \to 0) \end{aligned}$$

et l'on retrouve

$$y(x) \sim \frac{x^3}{6}, \quad (x \to 0)$$

Le comportement asymptotique d'une fonction dans un voisinage donné n'est pas unique. Plusieurs réponses sont donc envisageables. Remarquons cependant que, même si

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} \sim \mathrm{e}^{-x}, \quad (x \to 0)$$

on ne peut pas écrire que

$$1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} \sim 1 - \mathrm{e}^{-x}, \quad (x \to 0)$$

Ce raisonnement repose sur une généralisation abusive des propriétés de la relation $\sim$. Rappelons, Cf. (1.132), que

$$f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2 \quad \not\Rightarrow \quad f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

L'expression $1 - \mathrm{e}^{-x}$ ne décrit pas le comportement correct de la solution au voisinage de l'origine puisque

$$1 - \mathrm{e}^{-x} \sim x, \quad (x \to 0)$$

Total iii(b) : 4 pts

TOTAL QI : 24 PTS

Question II

i. Si T_{in} est constante, l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} + \beta q(T - T_{in}) = 0$$

est à variables séparables. On a

$$\int \frac{dT}{T - T_{in}} = -\int \beta q \, dt + C$$

où C est une constante, c'est-à-dire

$$\ln|T - T_{in}| = -\beta qt + C$$

d'où

$$T - T_{in} = C^* e^{-\beta qt} \quad \text{où} \quad C^* = \pm \, \mathrm{e}^C$$

La condition initiale $T(0) = T_0$ implique $T_0 - T_{in} = C^*$ de sorte que la solution est donnée par

$$T = T_{in} + (T_0 - T_{in})\,\mathrm{e}^{-\beta qt}$$

Remarquons que la solution singulière $T = T_{in}$ n'est pas une solution du problème puisqu'elle ne vérifie pas la condition initiale $T = T_0$.

Choix d'une méthode de résolution appropriée : 1 pt
Mise en oeuvre correcte de la méthode : 1 pt
Solution générale : 2 pts
Solution du problème (avec prise en compte de la condition initiale) : 2 pts
Pas de point pour cette remarque sur la solution singulière
Pénalité de 1 pt si la solution singulière est donnée et acceptée.
Total i. : 6 pts

De façon alternative, on peut écrire l'équation à résoudre

$$\frac{dT}{dt} + \beta qT = \beta qT_{in}$$

et la considérer comme une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

Même répartition des points pour la méthode alternative

$$T(t) = T_h(t) + T_p(t)$$

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z) = z + \beta q$$

Celui-ci admet le zéro simple $z = -\beta q$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

$$T_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-\beta qt}$$

où A est une constante.

La solution particulière $T_p(t) = T_{in}$ s'obtient par simple inspection de l'équation non homogène de sorte que

$$T(t) = A\,\mathrm{e}^{-\beta qt} + T_{in}$$

La constante A peut être déterminée en utilisant la condition initiale

$$T(0) = T_0 = A + T_{in} \quad \text{soit} \quad A = T_0 - T_{in}$$

La solution du problème s'écrit alors, comme ci-dessus,

$$T = T_{in} + (T_0 - T_{in})\,\mathrm{e}^{-\beta q t}$$

ii. Si T_{in} dépend de t, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{dT}{dt} + \beta q T = \beta q T_{in}(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

Identification/mise en évidence des parties homogène et non homogène : 1 pt

$$T(t) = T_h(t) + T_p(t)$$

Structure justifiée par la linéarité : 2 pts

L'équation homogène associée est identique à celle considérée en i. Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique : 1 pt

$$\mathcal{L}(z) = z + \beta q$$

Zéro du polynôme caractéristique : 1 pt

Celui-ci admet le zéro simple $z = -\beta q$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

Solution générale T_h : 2 pts

$$T_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-\beta q t}$$

où A est une constante.

La méthode de variation des constantes permet ensuite de déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme

Appel à la méthode de variation des constantes : 1 pt

$$T_p(t) = \left(\int C_1(t)dt\right) T_1(t)$$

où $T_1(t) = \mathrm{e}^{-\beta q t}$ est une solution fondamentale de l'équation homogène associée et où $C_1(t)$ vérifie

Connaissance de la méthode : 1 pt

$$C_1(t)\; T_1(t) = \beta q T_{in}(t)$$

soit

$$C_1(t)\,\mathrm{e}^{-\beta q t} = \beta q T_{in}(t)$$

ou encore

$$C_1(t) = \beta q T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}$$

On a alors

Expression intégrale de la solution particulière : 2 pts

$$T_p(t) = \beta q \left(\int T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}\,dt\right) \mathrm{e}^{-\beta q t}$$

De là, la solution générale de l'équation non homogène est donnée par

$$T(t) = \left(A + \beta q \int T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}\,dt\right) \mathrm{e}^{-\beta q t}$$

En choisissant la primitive qui s'annule en $t = 0$, la prise en compte de la condition initiale implique

Choix de la primitive : 1 pt

Détermination de la constante : 1 pt

$$T_0 = T(0) = \left[\left(A + \beta q \int_0^t T_{in}(u)\,\mathrm{e}^{\beta q u}\, du \right) \mathrm{e}^{-\beta q t} \right]_{t=0} = A$$

de sorte que

Solution du problème : 1 pt

$$T(t) = \left(T_0 + \beta q \int_0^t T_{in}(u)\,\mathrm{e}^{\beta q u}\, du \right) \mathrm{e}^{-\beta q t}$$

Rappelons que l'utilisation de la méthode de variation des constantes demande que l'équation différentielle soit écrite sous sa forme canonique, ce qui est bien le cas ici. Si ce n'est pas le cas, il est impératif de diviser l'équation par le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé pour faire apparaître l'expression appropriée du second membre.

Total ii. : 14 pts

De façon alternative, dans le cas particulier d'une équation du premier ordre, la méthode de variation des constantes peut être appliquée en exprimant la solution particulière recherchée sous la forme

Même répartition des points pour la méthode alternative que ci-dessus

$$T_p(t) = C(t)T_1(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-\beta q t}$$

où $C(t)$ désigne une fonction inconnue. Pour déterminer celle-ci, on introduit $T_p(t)$ dans l'équation différentielle complète. Cela donne

$$C'(t)\,\mathrm{e}^{-\beta q t} - \beta q C(t)\,\mathrm{e}^{-\beta q t} + \beta q C(t)\,\mathrm{e}^{-\beta q t} = \beta q T_{in}(t)$$

d'où

$$C'(t) = \beta q T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}$$

et

$$C(t) = \beta q \int T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}\, dt$$

Ainsi

$$T_p(t) = \beta q \left(\int T_{in}(t)\,\mathrm{e}^{\beta q t}\, dt \right) \mathrm{e}^{-\beta q t}$$

TOTAL QII : 20 PTS