LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Novembre 2019

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul·e, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***26 novembre****.*
- *Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez lisiblement votre nom en MAJUSCULES suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Soit le problème différentiel

$$\begin{cases} \cos x\, y'(x) - \sin x\, y(x) = 1 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

i. Sur quel ensemble $\mathtt{E}$ le théorème d'existence et d'unicité garantit-il l'existence d'une solution unique $y \in C_1(\mathtt{E})$? Justifiez.

ii. Sans résoudre le problème différentiel, montrez que la dérivée $y'(0)$ est indépendante de α.

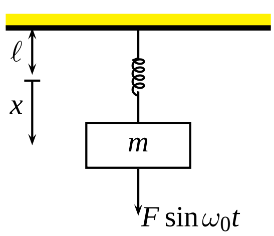
iii. Déterminez la solution du problème différentiel dans le cas où $\alpha = 1$.

Question II

On considère un système mécanique modélisé sous la forme d'une masse m suspendue à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de longueur naturelle ℓ et de raideur k. Le système présente un mouvement unidimensionnel selon l'axe vertical. Dans les conditions normales de fonctionnement, le système est soumis à une force périodique $F \sin \omega_0 t$ de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Initialement, la masse est abandonnée sans vitesse alors qu'elle se trouve à la longueur naturelle du ressort.

Si g désigne l'accélération de la pesanteur et que x est mesuré vers le bas à partir de la longueur naturelle du ressort, l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg + F \sin \omega_0 t$$



et les conditions initiales sont

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

Déterminez la loi du mouvement $x(t)$ du système.

SOLUTION TYPE

Question I

Linéarité : 1 pt

i. Sous forme canonique, l'équation différentielle s'écrit

$$y'(x) - \operatorname{tg} x \, y(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Une cond. initiale pour éq. 1er ordre : 1 pt

Puisque l'équation est linéaire, qu'elle est du premier ordre et assortie d'une condition initiale $y(0) = \alpha$ et que les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $1/(\cos x)$ sont continues sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ contenant le point $x = 0$ où cette condition initiale est imposée, le théorème d'existence et d'unicité permet d'affirmer que le problème différentiel proposé possède une solution unique (au moins) continûment dérivable sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

$\operatorname{tg} x$ et $1/(\cos x)$ $\in C_0(]-\pi/2, \pi/2[)$: 1 pt

Conclusion par le théorème d'existence et d'unicité : 1 pt

Total i. : 4 pts

ii. En $x = 0$, l'équation s'écrit

$$y'(0) - \operatorname{tg}(0) \, y(0) = \frac{1}{\cos(0)}$$

soit

$$y'(0) = 1$$

Ce résultat montre que la valeur de $y'(0)$ est indépendante du paramètre α.

Total ii. : 1 pt

iii. L'équation étant linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène $y_h(x)$ et d'une solution particulière de l'équation non homogène $y_p(x)$.

Structure de la solution ($y = y_h + y_p$) présentée théoriquement ou utilisée en pratique : 2 pts, dont 1 pt pour la justification par la linéarité

L'équation homogène s'écrit

$$y'(x) - \operatorname{tg} x \, y(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation à variables séparables que l'on peut exprimer sous la forme

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x \, dx$$

Séparation des variables : 1 pt

Remarquons à ce stade que la fonction $y = 0$ est une solution acceptable. En primitivant les deux membres de l'équation, on obtient, puisque $\cos x > 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{\cos x} + C$$

Soit, en prenant l'exponentielle des deux membres,

$$y_h(x) = \frac{\tilde{C}}{\cos x}$$

Solution générale de l'équation homogène : 3 pts

où $\tilde{C}$ est une constante réelle.

Remarquons que le choix $\tilde{C} = 0$ permet de retrouver la solution $y(x) = 0$ qui ne constitue donc pas une solution singulière à considérer séparément.

Traitement de la solution $y = 0$: 1 pt

La méthode de variation des constantes permet ensuite de déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme

Appel à la méthode de variation des constantes : 1 pt

$$y_p(x) = \left(\int C_1(x)dx \right) y_1(x)$$

où $y_1(x) = 1/\cos x$ est une solution fondamentale de l'équation homogène associée et où $C_1(x)$ vérifie

Connaissance de la méthode : 1 pt

$$C_1(x)\, y_1(x) = f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

soit

$$C_1(x) = 1$$

On calcule alors [1]

$$\int C_1(x)\, dx = \int\, dx = x$$

pour former la solution particulière

Solution particulière : 2 pts

$$y_p(x) = \frac{x}{\cos x}$$

De façon alternative, dans le cas particulier d'une équation du premier ordre, la méthode de variation des constantes peut être appliquée en exprimant la solution particulière recherchée sous la forme

Même répartition des 3 points que ci-dessus

$$y_p(x) = C(x) y_h(x) = \frac{C(x)}{\cos x}$$

où $C(x)$ désigne une fonction inconnue. Pour déterminer celle-ci, on introduit $y_p(x)$ dans l'équation différentielle complète. Cela donne

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

soit

$$C'(x) = 1 \quad \text{et}^{1} \quad C(x) = x$$

On obtient ainsi

$$y_p(x) = \frac{x}{\cos x}$$

En rassemblant les résultats précédents, on peut exprimer la solution générale sous la forme

Solution générale : 1 pt

$$y(x) = \frac{\tilde{C}}{\cos x} + \frac{x}{\cos x}$$

La constante $\tilde{C}$ est déterminée en tenant compte de la condition initiale $y(0) = 1$ soit

Détermination de la constante : 2 pts (dont 1 pt pour la méthode)

$$y(0) = \tilde{C} = 1$$

Finalement, la solution du problème différentiel pour $\alpha = 1$ est

Solution du problème : 1 pt

$$y(x) = \frac{x+1}{\cos x}$$

Total iii. : 15 pts

1. Dans le contexte de la recherche d'une solution particulière, il est inutile d'ajouter une constante arbitraire à la primitive.

Remarquons aussi qu'un examen attentif de l'équation différentielle permettait d'identifier directement une intégrale première de celle-ci. L'équation différentielle peut en effet s'écrire sous la forme

$$0 = \cos x\, y'(x) - \sin x\, y(x) - 1 = \frac{d}{dx}(y(x)\cos x - x)$$

de sorte que

$$y(x)\cos x - x = C$$

où C désigne une constante d'intégration. La valeur de celle-ci peut être déterminée en utilisant la condition initiale $y(0) = 1$, ce qui conduit à $1 = C$.

Total iii. avec intégrale première : 15 pts

La solution du problème différentiel s'écrit alors

$$y(x) = \frac{x+1}{\cos x}$$

TOTAL QI : 20 PTS

Question II

L'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg + F\sin\omega_0 t$$

s'écrit aussi, sous forme canonique et en introduisant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = g + \frac{F}{m}\sin\omega_0 t$$

Comme l'équation est linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Structure de la solution ($y = y_h + y_p$) présentée théoriquement ou utilisée en pratique : 2 pts, dont 1 pt pour la justification par la linéarité

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + \omega_0^2$$

Celui-ci admet les zéros simples $z_{1,2} = \pm i\omega_0$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

$$x_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ou encore, sous forme réelle,

$$x_h(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

où A et B sont des constantes.

Polynôme caractéristique : 1 pt
Zéros du polynôme caractéristique : 1 pt
Solution générale x_h, sous forme complexe ou réelle : 3 pts

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$

où $x_{p1}(t)$ et $x_{p2}(t)$ sont respectivement des solutions particulières associées à

$$f_1(t) = g \quad \text{et} \quad f_2(t) = \frac{F}{m}\sin\omega_0 t$$

Décomposition (expliquée ou mise en oeuvre) de la solution particulière en deux parties : 2 pts (dont 1 pt pour la justification par la linéarité)

Une solution particulière relative à $f_1(t)$ s'identifie par simple inspection de l'équation, soit

$$x_{p1} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{k}$$

Valeur de x_{p1} : 2 pts

Par ailleurs, la fonction $\sin\omega_0 t$ est la partie imaginaire de la fonction $e^{i\omega_0 t}$. Comme l'équation est linéaire à coefficients constants réels, une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\sin\omega_0 t$$

peut être obtenue en considérant la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}e^{i\omega_0 t} \qquad (\heartsuit)$$

Le second membre de ($\heartsuit$) est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(t)\,e^{\lambda t}$ où $\mathcal{P}_p(t) = F/m$ et $\lambda = i\omega_0$. Comme $i\omega_0$ est un zéro simple de $\mathcal{L}(z)$, on peut rechercher une solution particulière du type

$$\tilde{x}_{p2}(t) = Ct\,e^{i\omega_0 t}$$

Substituant cette expression dans ($\heartsuit$), il vient

Détermination et valeur de x_{p2} : 4 pts

$$2i\omega_0 C\,e^{i\omega_0 t} - Ct\omega_0^2\,e^{i\omega_0 t} + Ct\omega_0^2\,e^{i\omega_0 t} = \frac{F}{m}e^{i\omega_0 t}$$

de sorte que

$$C = \frac{F}{2i\omega_0 m} = -\frac{iF}{2\omega_0 m}$$

et

$$\tilde{x}_{p2}(t) = \frac{-iFt}{2\omega_0 m}e^{i\omega_0 t}$$

On trouve donc

Quelle que soit la méthode adoptée, la détermination correcte d'une solution particulière $x_p(t)$ rapporte au total 8 pts

$$x_{p2}(t) = \Im\left(-\frac{iFt}{2\omega_0 m}e^{i\omega_0 t}\right) = -\frac{Ft}{2\omega_0 m}\cos\omega_0 t = -\frac{Ft}{2\sqrt{km}}\cos\omega_0 t$$

et

$$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t) = \frac{mg}{k} - \frac{Ft}{2\sqrt{km}}\cos\omega_0 t$$

La solution générale de l'équation s'écrit alors

Solution générale de l'équation : 1 pt

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{mg}{k} - \frac{Ft}{2\sqrt{km}}\cos\omega_0 t$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées grâce aux conditions initiales du problème. On a, d'une part,

Détermination des constantes : 3 pts (dont 1 pt pour la méthode)

$$x(0) = A + \frac{mg}{k} = 0 \quad \text{soit} \quad A = -\frac{mg}{k}$$

D'autre part, on calcule aisément

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\cos\omega_0 t + \frac{Ft}{2m}\sin\omega_0 t$$

de sorte que

$$\frac{dx}{dt}(0) = B\omega_0 - \frac{F}{2\sqrt{km}} = 0 \quad \text{soit} \quad B = \frac{F}{2k}$$

Finalement, la solution du problème s'écrit

Solution du problème sous forme réelle : 1 pt

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1-\cos\omega_0 t) + \frac{F}{2k}\sin\omega_0 t - \frac{Ft}{2\sqrt{km}}\cos\omega_0 t$$

TOTAL QII : 20 PTS

Question I

i. • L'application du théorème d'existence et unicité de la solution doit être justifiée en faisant appel à la linéarité de l'équation différentielle.
   • Avant de vérifier la continuité des coefficients et du terme indépendant de l'équation, hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de la solution, il est indispensable d'écrire l'équation sous forme canonique en divisant celle-ci par le coefficient multipliant la dérivée d'ordre le plus élevé.
   • Pour justifier l'unicité de la solution de cette équation d'ordre 1, il faut disposer de la valeur de la fonction inconnue en un point x_0. Ici, on a $y(x_0) = 1$ en $x_0 = 0$.
   • Les résultats théoriques permettent d'affirmer que la solution existe et est unique sur l'*intervalle* E contenant le point $x_0 = 0$ où la condition initiale est donnée et sur lequel les coefficients et le terme indépendant de l'équation écrite sous forme canonique sont continus. Cet intervalle est donc $\mathtt{E} =]-\pi/2, \pi/2[$.
   Les réponses

$$]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}[\quad \text{et} \quad \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   ne sont pas correctes. En effet, même si des solutions de l'équation peuvent être écrites en dehors de $]-\pi/2, \pi/2[$, la discontinuité des coefficients de l'équation aux points $\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) rend ces solutions indépendantes de la condition initiale. Elles ne sont donc pas uniques.

ii. On attendait ici un résultat sur $y'(0)$, *i.e.* la valeur de la dérivée au point $x = 0$. Il ne faut pas confondre $y'(0)$ avec la dérivée de $y(0)$, laquelle est nécessairement nulle puisqu'il s'agit de la dérivée d'une constante.

iii. • L'identification d'une intégrale première permettait de résoudre très facilement ce problème différentiel. L'équation étant linéaire, sa solution pouvait également être obtenue de façon systématique en déterminant la solution générale de l'équation homogène (à variables séparables) et en lui ajoutant une solution particulière de l'équation complète. Cette décomposition de la solution doit impérativement être justifiée par la linéarité de l'équation.
   • Les propriétés de l'exponentielle doivent être maitrisées. En particulier,

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \, \mathrm{e}^b \neq \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$$

   Quand, lors de la résolution par séparation des variables, on obtient

$$\ln|y| = \ln \frac{1}{\cos x} + C$$

   on en déduit

$$y = \pm \, \mathrm{e}^C \frac{1}{\cos x} = \frac{\tilde{C}}{\cos x} \neq \frac{1}{\cos x} + C$$

• L'utilisation de la méthode de variation des constantes telle que présentée dans les notes de cours (page 203 de la version 2019-2020) demande que l'équation soit écrite sous sa forme canonique. Il est donc impératif de diviser l'équation par le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé pour faire apparaître l'expression appropriée du second membre $f(x)$ de la dernière équation du système à résoudre (équation 2.43 des notes de cours).

Question II

- L'énoncé faisait référence à une force périodique, ce qui permettait de lever toute ambiguïté quant à l'interprétation de l'expression $F\sin\omega_0 t$ de cette excitation. En effet, cette expression devait être interprétée comme $F\sin(\omega_0 t)$ et non comme $F(\sin\omega_0)t$, la seconde expression n'étant pas périodique mais décrivant une croissance linéaire de l'excitation.
  Notons également que les expressions $\sin\omega_0$, et donc $F(\sin\omega_0)t$, ne sont correctes d'un point de vue dimensionnel. L'argument du sinus dans un tel cadre aurait les dimensions d'une vitesse angulaire ($[\omega_0] = T^{-1}$) alors que les arguments des fonctions transcendantes doivent toujours être sans dimension. Pour cette raison, l'expression $F\sin\omega_0 t$ peut toujours être interprétée sans ambiguïté comme $F\sin(\omega_0 t)$.
- Il faut pouvoir s'adapter aux notations de l'énoncé. Ici, l'inconnue est la fonction x et elle dépend de la variable t. Il faut être attentif à ne pas changer de notation en cours de résolution.
- Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène s'obtient en remplaçant chaque dérivée par une puissance de z correspondant à l'ordre de dérivation. Le polynôme caractéristique associé à l'équation
  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$
  s'écrit $\mathcal{L}(z) = z^2 + \omega_0^2 z^0 = z^2 + \omega_0^2$ et pas $\mathcal{L}(z) = z^2 + \omega_0^2 z$ puisque le facteur ω_0^2 multiplie la fonction x et pas sa dérivée première.
- Il est nécessaire de justifier théoriquement les méthodes de résolution utilisées. En particulier ici,
  - La séparation de la solution générale de l'équation en solution générale de l'équation homogène et solution particulière de l'équation non homogène doit être justifiée par la linéarité de l'équation.
  - La détermination des solutions fondamentales de l'équation homogène en utilisant la méthode du polynôme caractéristique doit être justifiée par le fait qu'il s'agit d'une équation linéaire à coefficients constants.
  - La recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène en utilisant le théorème de superposition, c'est-à-dire en recherchant séparément des solutions particulières relatives à chacun des deux termes du second membre, doit aussi être justifiée par la linéarité de l'équation.
  - L'utilisation de la méthode de l'exponentielle-polynôme pour rechercher une solution particulière n'est possible que si l'équation est linéaire à coefficients constants et que le second membre est de la forme exponentielle-polynôme, c'est-à-dire du produit d'un polynôme et d'une exponentielle. C'est parce que, en plus, les coefficients sont réels qu'il est possible ici de rechercher une solution particulière correspondant à une exponentielle imaginaire et d'en prendre ensuite la partie imaginaire pour trouver celle qui correspond au sinus du second membre.
- Rechercher une solution particulière du type $A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ (où A et B sont des constantes) ne pouvait mener à rien dans cet exercice. Comme le montre la méthode de l'exponentielle-polynôme, le facteur multipliant la variable dans l'argument de l'exponentielle du second membre est ici égal à ω_0 qui se trouve être un zéro simple du polynôme caractéristique de l'équation homogène. C'est donc une solution du type $At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t$ qu'il conviendrait de rechercher ou, de façon équivalente avec la méthode de l'exponentielle-polynôme, une solution $Ct\,e^{i\omega_0 t}$ (où C est une constante).
- Même si la méthode de l'exponentielle-polynôme est de loin la plus adaptée dans ce problème, une solution particulière pouvait être obtenue en utilisant la méthode de

variation des constantes. De très nombreux étudiants ont utilisé cette méthode mais très peu l'ont menée à bien, tant cette approche est lourde et propice aux erreurs. Nous reproduisons donc ici les développements et résultats afin qu'ils puissent corriger leurs erreurs. En particulier, il est indispensable d'écrire l'équation sous forme canonique pour appliquer correctement la méthode, c'est-à-dire ici, de diviser l'équation par la masse m multipliant la dérivée de la fonction inconnue d'ordre le plus élevé.
La méthode de variation des constantes permet de déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$x_p(t) = \left(\int C_1(t)dt\right) x_1(t) + \left(\int C_2(t)dt\right) x_2(t)$$

où $x_1(t) = \cos\omega_0 t$ et $x_2(t) = \sin\omega_0 t$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à l'équation initiale et où les fonctions $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont obtenues en résolvant le système

$$\begin{cases} C_1(t)\, x_1(t) + C_2(t)\, x_2(t) = 0 \\ C_1(t)\, x_1'(t) + C_2(t)\, x_2'(t) = g + \dfrac{F}{m}\sin\omega_0 t \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} C_1(t)\ \cos\omega_0 t + C_2(t)\ \sin\omega_0 t = 0 \\ -C_1(t)\omega_0\ \sin\omega_0 t + C_2(t)\omega_0\ \cos\omega_0 t = g + \dfrac{F}{m}\sin\omega_0 t \end{cases}$$

On obtient successivement

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \dfrac{F}{m\omega_0}\sin^2\omega_0 t \\ C_2(t) = \dfrac{g}{\omega_0}\cos\omega_0 t + \dfrac{F}{m\omega_0}\cos\omega_0 \sin\omega_0 t \end{cases}$$

et (en faisant le choix de primitives particulières)

$$\begin{cases} \displaystyle\int C_1(t)\, dt = \dfrac{g}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \dfrac{Ft}{2m\omega_0} + \dfrac{F}{4m\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t \\ \displaystyle\int C_2(t)\, dt = \dfrac{g}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t - \dfrac{F}{4m\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t \end{cases}$$

On peut donc identifier la solution particulière

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \left[\frac{g}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{Ft}{2m\omega_0} + \frac{F}{4m\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t\right]\cos\omega_0 t + \left[\frac{g}{\omega_0^2}\sin\omega_0 t - \frac{F}{4m\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t\right]\sin\omega_0 t \\ &= \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{Ft}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t + \frac{F}{4m\omega_0^2}\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Remarquons que le troisième terme de cette solution particulière se combine avec le terme en $\sin\omega_0 t$ de la solution générale de l'équation homogène. On a en effet alors la solution générale

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{Ft}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t + \frac{F}{4m\omega_0^2}\sin\omega_0 t$$

qui peut aussi s'écrire

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + \tilde{B}\sin\omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{Ft}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t$$

en introduisant une nouvelle constante $\tilde{B} = B + F/(4m\omega_0^2)$. Les constantes A et $\tilde{B}$ peuvent ensuite être déterminées comme dans la solution-type.

- Le problème étudié représente une situation physique. La solution finale doit donc être purement réelle. De même, une inspection des dimensions physiques des termes de la solution générale permet de repérer facilement une erreur dans les exposants des facteurs dimensionnels comme ω_0, m, F ou k.