Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2016

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans l'aide des notes, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum d'une heure et demie.

- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du* ***29 novembre****.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

On considère l'équation différentielle

$$\ddot{y} + (1-\alpha)\omega\dot{y} + \alpha^2\omega^2 y = f(t)$$

où t est le temps avec $(\dot{\ }) = \dfrac{d}{dt}$ et où α et ω sont des paramètres réels strictement positifs.

i. Dans le cas où $f(t) = 0$,
   (a) déterminez la solution générale de l'équation différentielle considérée en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs prises par les paramètres α et ω ;
   (b) déterminez les valeurs des paramètres du problème pour lesquelles l'équation admet des solutions non bornées pour $t \to +\infty$. Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$ et $f(t) = F\cos\omega t$ (où F désigne une constante réelle non nulle), déterminez la solution de l'équation différentielle ci-dessus assortie des conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$.

SOLUTION

i. (a) Dans le cas où $f(t) = 0$, l'équation s'écrit

$$\ddot{y} + (1-\alpha)\omega\dot{y} + \alpha^2\omega^2 y = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du 2ème ordre, linéaire à coefficients constants et homogène.

Justification de la méthode par la linéarité et les coefficients constants : 1 pt

L'équation étant linéaire à coefficients constants, sa solution générale peut être obtenue en considérant les zéros du polynôme caractéristique, *i.e.* les solutions de

$$z^2 + (1-\alpha)\omega z + \alpha^2\omega^2 = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

Polynôme caractéristique : 1 pt

Une discussion doit donc être menée suivant les valeurs prises par le discriminant

$$\rho = (1-\alpha)^2\omega^2 - 4\alpha^2\omega^2 = \omega^2(-3\alpha^2 - 2\alpha + 1)$$

- $\rho = 0$

  Ce cas se produit si $-3\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, c'est-à-dire si $\alpha = -1$ ou $\alpha = 1/3$. Le paramètre α étant strictement positif, seule la valeur $\alpha = 1/3$ doit être prise en compte.

  Valeur de α correspondant à $\rho = 0$: 1 pt

  Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède le zéro double réel

  $$z_{1,2} = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\omega = -\frac{\omega}{3}$$

  et la solution générale de l'équation s'écrit

  Solution si $\alpha = 1/3$: 2 pts

  $$y(t) = (At + B)\exp\left(-\frac{\omega t}{3}\right) \qquad (1)$$

  où A et B sont des constantes.

- $\rho < 0$

  Ce cas se produit si $-3\alpha^2 - 2\alpha + 1 < 0$, c'est-à-dire si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1/3, +\infty[$. Le paramètre α étant strictement positif, seule la condition $\alpha > 1/3$ doit être prise en compte.

  Condition sur α pour avoir $\rho < 0$: 1 pt

  Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède les deux zéros complexes conjugués

  $$z_{1,2} = \frac{\omega}{2}\left(\alpha - 1 \pm i\sqrt{3\alpha^2 + 2\alpha - 1}\right)$$

  et la solution générale de l'équation s'écrit

  Solution si $\rho < 0$ sous forme réelle ou complexe : 2 pts

  $$\begin{aligned} y(t) &= C_1\,\mathrm{e}^{z_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{z_2 t} \qquad (2) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\omega t\right)\left[C_1\exp\left(\frac{i\omega t}{2}\sqrt{3\alpha^2+2\alpha-1}\right) + C_2\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\sqrt{3\alpha^2+2\alpha-1}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\omega t\right)\left[A\cos\left(\frac{\omega t}{2}\sqrt{3\alpha^2+2\alpha-1}\right) + B\sin\left(\frac{\omega t}{2}\sqrt{3\alpha^2+2\alpha-1}\right)\right] \end{aligned}$$

  où A et B sont des constantes.

- $\rho > 0$

  Ce cas se produit si $-3\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0$, c'est-à-dire si $\alpha \in]-1, 1/3[$. Le paramètre α étant strictement positif, seules les valeurs de $\alpha \in]0, 1/3[$ sont pertinentes.

  Condition sur α pour avoir $\rho > 0$: 1 pt

Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède les deux zéros réels

$$z_{1,2} = \frac{\omega}{2}\left(\alpha - 1 \pm \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 1}\right)$$

et la solution générale de l'équation s'écrit

Solution si $\rho > 0$: 2 pts

$$\begin{aligned} y(t) &= A\,\mathrm{e}^{z_1 t} + B\,\mathrm{e}^{z_2 t} \qquad (3) \\ &= A\exp\left[\frac{\omega t}{2}\left(\alpha - 1 + \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 1}\right)\right] + B\exp\left[\frac{\omega t}{2}\left(\alpha - 1 - \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 1}\right)\right] \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes.

(b) Considérons la possibilité d'obtenir une solution non bornée pour $t \to \infty$ dans les trois cas distingués ci-dessus.

- La solution (1) obtenue dans le cas où $\alpha = 1/3$ est bornée pour $t \to \infty$.
- La solution (2) correspondant à des valeurs de $\alpha > 1/3$ est bornée pour $\alpha \in]1/3, 1]$ et non bornée pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.
- La solution (3) obtenue dans le cas où $\alpha < 1/3$ admet des solutions non bornées si les paramètres du problème sont tels que $z_1 > 0$ ou $z_2 > 0$. Cette éventualité peut être écartée puisque, de l'expression ($\diamondsuit$) du polynôme caractéristique, on tire

Solution bornée si $\alpha = 1/3$: 1 pt
Solution non bornée si $\alpha > 1$: 1 pt
Comportement borné si $\alpha < 1/3$: 1 pt

$$z_1 + z_2 = (\alpha - 1)\omega < 0, \qquad z_1 z_2 = \alpha^2\omega^2 > 0$$

de sorte que les deux zéros réels sont strictement négatifs.
De façon alternative, on peut vérifier que le plus grand des zéros du polynôme caractéristique est négatif quel que soit $\alpha < 1/3$ puisque les transformations de l'inéquation

$$\alpha - 1 + \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 1} > 0$$

soit

$$\begin{aligned} \sqrt{-3\alpha^2 - 2\alpha + 1} &> 1 - \alpha \\ -3\alpha^2 - 2\alpha + 1 &> 1 - 2\alpha + \alpha^2 \\ -4\alpha^2 &> 0 \end{aligned}$$

ne permettent d'identifier aucune solution.

En conclusion, l'équation donnée admet des solutions non bornées si et seulement si $\alpha > 1$.

Total i. : 14 pts

ii. Si $\alpha = 1$ et $f(t) = F\cos\omega t$, l'équation s'écrit

Équation à résoudre : 1 pt

$$\ddot{y} + \omega^2 y = F\cos\omega t$$

Il s'agit d'une équation non homogène linéaire, ce qui nous permet d'écrire sa solution générale sous la forme

Méthode de résolution justifiée par la linéarité : 1 pt

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où $y_h(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée et $y_p(t)$ une solution particulière de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène.

La solution de l'équation homogène quand $\alpha = 1$ est un cas particulier du point i. avec $\rho < 0$. Les zéros du polynôme caractéristique sont $\pm i\omega$ et la solution s'écrit

Solution générale de l'équation homogène : 2 pts

$$y_h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Solution particulière de l'équation non homogène.

Le second membre $F\cos\omega t$ n'est pas du type exponentielle-polynôme. Cependant, en remarquant que l'équation est à coefficients réels et que

$$F\cos\omega t = \Re\left[F\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right],$$

nous obtenons y_p en prenant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$\ddot{y} + \omega^2 y = F\,\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{$\heartsuit$}$$

Le second membre de l'équation ci-dessus est de la forme exponentielle-polynôme. Nous pouvons alors appliquer la méthode de l'exponentielle-polynôme puisque l'équation est à coefficients constants. Comme $i\omega$ est un zéro simple du polynôme caractéristique quand $\alpha = 1$, une solution particulière de l'équation est de la forme $Ct\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ où la constante C est déterminée par substitution dans l'équation ($\heartsuit$),

Solution particulière correcte, quelle que soit la méthode utilisée : 3 pts

$$2i\omega C\,\mathrm{e}^{i\omega t} - C\omega^2 t\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C\omega^2 t\,\mathrm{e}^{i\omega t} = F\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

ce qui donne

$$C = \frac{F}{2i\omega} = -\frac{iF}{2\omega}$$

De là,

$$y_p = \Re\left(-\frac{iF}{2\omega}t\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right) = \frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

Solution générale de l'équation : 1 pt

$$y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t$$

Solution du problème.

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A et B. On a

$$0 = y(0) = A \quad \text{donc} \quad A = 0$$

et, puisque

Méthode pour la détermination des constantes : 1 pt

$$\dot{y}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t + \frac{F}{2\omega}\sin\omega t + \frac{Ft}{2}\cos\omega t$$

on a

$$0 = \dot{y}(0) = \omega B \quad \text{donc} \quad B = 0$$

Finalement, la solution du problème différentiel s'écrit

Solution du problème : 1 pt

$$y(t) = \frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t$$

Total ii. : 10 pts
Total *: 24 pts*

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Les paramètre α et ω par rapport auxquels la discussion doit être menée sont annoncés strictement positifs. Il ne faut donc pas considérer les valeurs négatives (ou nulles) de ces paramètres. Une lecture attentive de l'énoncé permet de se concentrer sur ce qui est vraiment demandé.

i. (a)
- Avant dans se lancer dans une méthode de résolution, il faut s'assurer qu'on est bien dans le cadre permettant d'utiliser cette méthode. Ici, il fallait préciser que l'équation différentielle était bien linéaire à coefficients constants pour pouvoir utiliser la méthode du polynôme caractéristique pour en exprimer la solution générale.
- Le polynôme caractéristique de l'équation homogène donnée est un polynôme du second degré. La méthode pour en déterminer les zéros est donc systématique. Il fallait évidemment discuter en fonction du signe du discriminant associé au polynôme puisque l'expression des zéros en dépendait. En particulier, dans le cas où $\rho < 0$, les zéros complexes du polynôme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\rho}}{2a}$$

  Il ne faut pas oublier de changer le signe du discriminant sous la racine.
- L'expression de la solution générale de l'équation différentielle dépend du type et du nombre des zéros du polynôme caractéristique.
  - ⋆ Si $\rho = 0$, ce qui se produit ici pour la seule valeur admissible $\alpha = 1/3$, le polynôme caractéristique possède un zéro double $-\omega/3$ et la solution associée est

$$y(t) = (At + B)\exp\left(-\frac{\omega t}{3}\right)$$

    où un polynôme du premier degré multiplie l'exponentielle.
  - ⋆ Si $\rho > 0$, le polynôme caractéristique possède deux zéros réels z_1 et z_2 et la solution s'écrit

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{z_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{z_2 t}$$

    où les exponentielles sont multipliées par des constantes.
  - ⋆ Si $\rho < 0$, le polynôme caractéristique possède deux zéros complexes conjugués

$$z_{1,2} = a \pm ib$$

    et la solution, a priori constituée d'une combinaison linéaire d'exponentielles complexes,

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{z_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{z_2 t} = \mathrm{e}^{at}\left(C_1\,\mathrm{e}^{ibt} + C_2\,\mathrm{e}^{-ibt}\right)$$

    est avantageusement exprimée sous forme réelle au moyen d'une combinaison linéaire de cosinus/sinus

$$y(t) = \mathrm{e}^{at}\,(A\cos bt + B\sin bt)$$

(b) Il fallait ici envisager successivement les différentes solutions obtenues au point précédent (en fonction du signe du discriminant) et regarder pour quelles valeurs des paramètres elles tendent vers l'infini quand le temps tend vers l'infini. On rappellera utilement que
- pour élever au carré une inégalité, il faut s'assurer que les deux membres sont de même signe et changer le sens de l'inégalité s'ils sont négatifs ;
- on ne peut pas écrire qu'un nombre complexe est positif ou négatif. En l'occurrence, seule la partie réelle des zéros complexes intervient pour savoir si la solution est bornée ou pas.

ii.
- Dans cette deuxième partie du problème, l'équation donnée est non homogène. Le second membre étant de la forme $\cos\omega t$, plusieurs méthodes sont envisageables pour déterminer une solution particulière.

- $\star$ La méthode de variation des constantes est toujours applicable. Elle est cependant longue et n'était certainement pas ici la solution la plus efficace. Si, malgré tout, c'est cette méthode qui est adoptée, il faut être très attentif à l'appliquer correctement, en particulier sans commettre d'erreur dans le calcul des primitives… Rappelons qu'il y a toujours moyen de vérifier que la solution particulière obtenue est correcte en la substituant dans l'équation différentielle.
- $\star$ La méthode de l'exponentielle-polynôme, utilisée dans la solution-type, était tout à fait adaptée à condition de considérer, dans un premier temps, $\cos\omega t$ comme la partie réelle de l'exponentielle imaginaire $\mathrm{e}^{i\omega t}$. Remarquons que, puisque $i\omega$ est un zéro simple du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène correspondante, la forme de la solution particulière à rechercher est du type $Ct\,\mathrm{e}^{i\omega t}$.
- $\star$ Remplacer $\cos\omega t$ par $(\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{-i\omega t})/2$ et appliquer deux fois la méthode de l'exponentielle-polynôme était aussi possible mais plus long que la méthode précédente.
- $\star$ La méthode des coefficients indéterminés fonctionne très bien si on a une idée précise de la forme de la solution particulière recherchée. Dans cet exercice, puisque le second membre fait apparaître la fonction $\cos\omega t$, on peut imaginer rechercher une solution de la forme $A\cos\omega t$ ou, plus généralement, $A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Cependant, cette recherche ne peut aboutir car les fonctions $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$ vérifient l'équation homogène associée. Comme le montre la discussion de la méthode de l'exponentielle-polynôme, on peut par contre rechercher une solution de la forme $At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$ en ajustant les constantes A et B pour vérifier l'équation différentielle proposée.

- Les constantes de la solution générale devaient être déterminées en utilisant les conditions initiales données.