Prof. Éric J.M.DELHEZ

ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

ÉVALUATION FORMATIVE

Octobre 2023

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions sans aide extérieure, sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

On cherche à résoudre de façon approchée l'équation

$$3+\frac{x}{2}-x^2=\mathrm{e}^x \qquad (\diamondsuit)$$

i. En raisonnant graphiquement, montrez que cette équation possède exactement deux solutions réelles x_- et x_+ dont l'une est négative et l'autre est positive.

ii. En approchant le membre de droite par son polynôme de Taylor d'ordre 2 au voisinage de 0, déterminez des premières approximations $\tilde{x}_- < 0$ et $\tilde{x}_+ > 0$ des deux solutions de ($\diamondsuit$).

iii. En analysant le reste de la formule de Taylor, déterminez une majoration de la différence entre les deux membres de l'équation pour $x = \tilde{x}_+$.

iv. En approchant le membre de droite par son polynôme de Taylor d'ordre 2 au voisinage de $\tilde{x}_+$, montrez qu'une seconde approximation de la solution positive de ($\diamondsuit$) est donnée par

$$\frac{1+\sqrt{49+16\mathrm{e}-4\mathrm{e}^2}}{2(2+\mathrm{e})}$$

Question II

i. On dit que $f = o(g)$ au voisinage de x_0 lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Sur base de cette définition, montrez que si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$ au voisinage de x_0.

ii. Si f est réelle et continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$, peut-on affirmer qu'il existe un $\xi \in]0,1[$ tel que $f'(\xi) = 0$? Justifiez.

iii. On définit la fonction sinc par

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrez que la fonction sinc possède une fonction réciproque g indéfiniment continûment dérivable au moins sur $]0,1[$. Calculez $g'(2/\pi)$.

SOLUTION TYPE

Question I

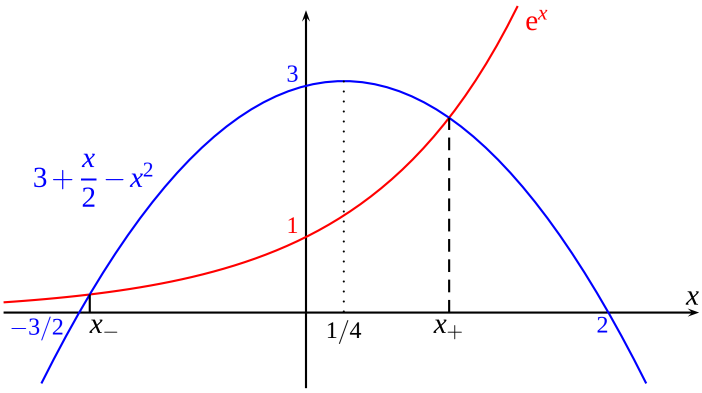
i. Les graphiques des fonctions constituant les deux membres de l'équation

Représentation graphique qualitativement correcte : 2 pts

$$3+\frac{x}{2}-x^2=e^x$$

peuvent être esquissés comme suit en exploitant le fait que le membre de gauche décrit une parabole avec concavité vers le bas, dont le maximum est situé en $(1/4, 49/16)$ et qui s'annule en $x=-3/2$ et $x=2$.

Caractéristiques numériques de la parabole : 1 pt



Conclusion : 1 pt

Les deux courbes se croisent une fois sur $]-3/2,0[$ et une fois sur $]1/4,2[$. Ces deux intersections constituent les seules solutions x_- et x_+ de l'équation.

Total i : 4 pts

ii. L'application de la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de l'origine demande que la fonction soit réelle, deux fois continûment dérivable sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x<0$) et trois fois dérivable sur $]0,x[$ ($]x,0[$ si $x<0$). C'est bien le cas de la fonction $f(x)=e^x$ puisqu'elle est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

f réelle : 1 pt
Autres hypothèses : 2 pts, ok si $f\in C_\infty(\mathbb{R})$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$f^{(n)}(x)=e^x,\qquad f^{(n)}(0)=1$$

de sorte que le polynôme de Taylor d'ordre deux est donné par

Polynôme correct (établi ou reproduit) : 3 pts

$$\mathcal{P}_2(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}=1+x+\frac{x^2}{2}$$

Introduisant cette approximation dans l'équation considérée, on a

$$3+\frac{x}{2}-x^2=1+x+\frac{x^2}{2}\qquad(\spadesuit)$$

soit, après simplification,

Racines correctes : 2 pts

$$3x^2+x-4=0$$

Les racines de cette équation fournissent les approximations recherchées

$$\tilde{x}_-=-4/3,\qquad \tilde{x}_+=1$$

des solutions de l'équation ($\diamondsuit$).

Total ii : 8 pts

iii. L'application de la formule de Taylor conduit à

$$f(x)=\mathcal{P}_2(x)+\mathcal{R}_2(x)$$

où, pour $x>0$,

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(\xi) = \frac{x^3}{3!} \mathrm{e}^{\xi} \qquad \text{et} \qquad \xi \in]0, x[$$

Expression du reste pour Taylor à l'ordre 2 : 2 pts dont 1 pt pour la localisation de ξ

La différence $\Delta(x)$ entre les deux membres de l'équation, aussi appelée le résidu, est donné par

$$\Delta(x) \equiv \mathrm{e}^x - \left(3 + \frac{x}{2} - x^2\right) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x) - \left(3 + \frac{x}{2} - x^2\right)$$

En $\tilde{x}_+$, puisque $\tilde{x}_+$ est solution de (♠), on obtient

Démonstration de $\Delta(1) = \mathcal{R}_2(1)$: 1 pt

$$\Delta(\tilde{x}_+) = \mathcal{P}_2(\tilde{x}_+) + \mathcal{R}_2(\tilde{x}_+) - \left(3 + \frac{\tilde{x}_+}{2} - \tilde{x}_+^2\right) = \mathcal{R}_2(\tilde{x}_+)$$

soit

$$\Delta(1) = \mathcal{R}_2(1) = \frac{1}{3!} \mathrm{e}^{\xi} \qquad \text{où} \qquad \xi \in]0, 1[$$

Expression de $\mathcal{R}_2(1)$: 1 pt dont 0.5 pt pour la localisation de ξ

La fonction exp étant strictement croissante sur son domaine de définition, et en particulier sur $]0,1[$, $|\mathrm{e}^{\xi}| < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ceci fournit la majoration

Majoration : 2 pts

$$|\Delta(1)| \leq \frac{\mathrm{e}}{3!}$$

Total iii : 6 pts

iv. Cette majoration du résidu ne permet pas d'être très optimiste par rapport à la qualité de l'approximation de x_+ par $\tilde{x}_+ = 1$. Cette première approximation peut cependant être utilisée pour rechercher une meilleure approximation en développant la fonction exp autour de $\tilde{x}_+$.

Hypothèses : 1 pt.

Ici encore, l'application de la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 1 peut être justifiée par le fait que la fonction exp est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme de Taylor correspondant est donné par

Polynôme de Taylor à l'ordre 2 : 3 pts

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2^{\star}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2 \\ &= \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^1(x-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^1(x-1)^2\end{aligned}$$

En substituant cette nouvelle approximation de la fonction exp dans l'équation de départ, on obtient

$$3 + \frac{x}{2} - x^2 = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2$$

soit, après simplification,

Équation approchée correcte : 1 pt

$$(2+\mathrm{e})x^2 - x - (6-\mathrm{e}) = 0$$

Cette équation du second degré possède deux racines distinctes données par

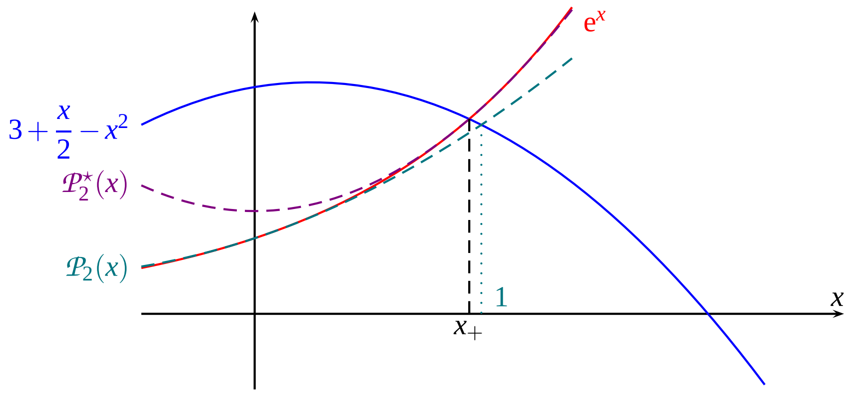
Racine positive correcte : 1 pt

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(6-\mathrm{e})(2+\mathrm{e})}}{2(2+\mathrm{e})}$$

et dont seule la solution correspondant au signe + est positive. Celle-ci constitue donc la nouvelle approximation recherchée de x_+, soit, comme annoncé,

$$\tilde{x}_+^{\star} = \frac{1 + \sqrt{49 + 16\,\mathrm{e} - 4\,\mathrm{e}^2}}{2(2+\mathrm{e})}$$

La figure ci-dessous illustre les approximations $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2^{\star}$ de la fonction exp ainsi que les approximations correspondantes de x_+. Elle témoigne de la qualité de l'approximation de la solution correspondant à $\mathcal{P}_2^{\star}$.



Total iv : 6 pts

TOTAL QI : 24 PTS

Question II

i. Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ au voisinage de x_0, on peut écrire, en vertu de la définition de la notation "est négligeable par rapport à",

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_1(x_0))(\forall x \in V_1(x_0)) : |f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|g(x)|$$

et

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_2(x_0))(\forall x \in V_2(x_0)) : |f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|g(x)|$$

Dès lors, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_3(x_0) = V_1(x_0) \cap V_2(x_0))(\forall x \in V_3(x_0)) :$$
$$|f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|g(x)| = \varepsilon |g(x)|$$

ce qui traduit la relation

$$f_1 + f_2 = o(g), \quad (x \to x_0)$$

Traduction des hypothèses avec $V_1 \neq V_2$: 1 pt
Identification de V_3 : 1 pt
Gestion des ε : 1 pt
Valeur absolue de la somme inférieure à la somme des valeurs absolues : 1 pt
Vu l'énoncé, 0/4 si démonstration se basant sur les limites.

Total i : 4 pts

ii. FAUX.

L'énoncé correspondrait à un cas particulier du théorème de Rolle si la fonction f était dérivable sur $]0,1[$. Faute de cette hypothèse, on peut aisément trouver un contre-exemple qui contredit l'énoncé proposé. Par exemple, la fonction

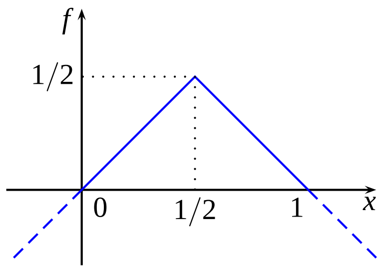
$$f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

dont le graphique est illustré ci-dessous est réelle, continue sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = f(1)$ mais son graphique ne comporte aucun point où la tangente est horizontale, c'est-à-dire aucun point où la dérivée s'annule.

Contre-exemple correct : 2.5 pts si seulement graphique, 4 pts si expression analytique de $f(x)$

1/4 si "Faux car il manque une hypothèse pour appliquer le théorème de Rolle."

0/4 si "Faux" ou "Vrai" sans justification.



Total ii : 4 pts

iii. On relève d'abord que la fonction sinc s'annule une première fois sur $]0,+\infty[$ en $x=\pi$. On a aussi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

de sorte que sinc $\in C_0(\mathbb{R})$.

Identification de $]0,\pi[$ tel que $\mathrm{sinc}(]0,\pi[)=]0,1[$: 1.5 pts

Pour appliquer le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques à $f=\mathrm{sinc}$ et justifier l'existence et la régularité de $g=\mathrm{sinc}^{-1}$ sur $]0,1[$, on note que

- la fonction sinc est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $]0,\pi[$;

  $\mathrm{sinc}\in C_\infty(]0,\pi[)$ *: 1 pt*

- la fonction est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ avec

  Mention de l'hyp. $f'<0$ sur $]0,\pi[$: 1 pt

  $$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0 \quad \text{sur cet intervalle};$$

  Expression de f' : 0.5 pt

  Ce résultat peut être justifié en remarquant que le signe de f' est également celui de son numérateur et que

  Justification de $f'<0$ sur $]0,\pi[$: 2 pts

  $$\frac{d}{dx}\left[x\cos x-\sin x\right]=-x\sin x \quad <0 \text{ sur }]0,\pi[$$

  Le numérateur est donc nul en $x=0$ et strictement décroissant sur $]0,\pi[$. Il en résulte que le numérateur est strictement négatif sur cet intervalle, tout comme f'.

- $\mathrm{sinc}(]0,\pi[)=]0,1[$.

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que la fonction $g=\mathrm{sinc}^{-1}$ est définie est indéfiniment continûment dérivable sur $]0,1[$.

Conclusion : 0.5 pt

Le même théorème affirme que, pour tout $y\in]0,1[$,

Expression générale/théorique de g' : 1 pt

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)\big|_{x=g(y)}}$$

Le point $x=g(y)$ intervenant dans cette expression, à trouver dans $]0,\pi[$, est tel que $y=f(x)$, ce qui se traduit en particulier pour $y=2/\pi$ par

Identification de $x=\pi/2$: 1 pt

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sin x}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

On calcule ensuite

$$f'(\pi/2)=\frac{(\pi/2)\cos(\pi/2)-\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2}=-\frac{4}{\pi^2}$$

et on obtient finalement

Valeur de $g'(2/\pi)$: 1.5 pt

$$g'(2/\pi)=-\frac{\pi^2}{4}$$

Le raisonnement ci-dessus peut aussi être adapté à la fonction réciproque qui correspondrait à la solution $x\in]-\pi,0[$ de $y=\mathrm{sinc}\,x$. Dans ce cas, f est strictement croissante et indéfiniment continument dérivable sur $]-\pi,0[$ avec $f(]-\pi,0[)=]0,1[$ de sorte que $g\in C_\infty(]0,1[)$ et $g'(2/\pi)=\pi^2/4$.

Total iii : 10 pts

TOTAL QII : 18 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i. La représentation graphique précise des fonctions $f(x) = 3 + x/2 - x^2$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$ était nécessaire pour pouvoir déterminer leurs intersections. Sans calculer le sommet et les racines de la parabole, on ne pouvait pas conclure qu'il y avait deux intersections.

De façon générale, il est souvent utile d'appuyer son raisonnement sur une représentation graphique, même lorsque ceci n'est pas demandé explicitement.

ii.
- On sera attentif à vérifier les hypothèses correctes de la formule de Taylor. Pour appliquer cette formule à l'ordre 2, il faut que f soit réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x < 0$) et 3 fois dérivable sur l'ouvert $]0,x[$ (ou $]x,0[$ si $x < 0$).
- Il n'est pas correct d'écrire $f(x) = \mathcal{P}_2(x)$. La fonction n'est pas égale à son polynôme de Taylor. La formule correcte est $f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$.

iii.
- Quand on écrit le reste $\mathcal{R}_2(x) = \dfrac{x^3}{3!} f^{(3)}(\xi)$, il est indispensable de localiser ξ. Ici, puisque la formule est appliquée en un $x > 0$, on a $\xi \in]0,x[$.

  De façon générale, quand on introduit un nouvel élément ou un nouveau paramètre dans une développement ou un raisonnement, il faut préciser ce qu'est ce nouvel élément.
- Il fallait établir, comme dans la solution-type, que la différence entre les deux membres de l'équation en $\tilde{x}_+$, c'est-à-dire le résidu $\Delta(\tilde{x}_+)$, était égale à $R_2(\tilde{x}_+)$. Il ne fallait pas simplement le supposer comme on trouve dans de nombreuses copies.
- Le caractère croissant de l'exponentielle fait ici en sorte que la majoration du reste est réalisée en remplaçant ξ par sa borne supérieure. On sera attentif au fait que la majoration n'est pas toujours réalisée de cette façon. De façon générale, il faut examiner le comportement de l'expression à majorer pour dégager une majoration.

iv. À chaque application de la formule de Taylor, il faut énoncer les hypothèses pour justifier le domaine de validité de la formule écrite.

Question II

i.
- La définition de "o" via des limites n'est pas générale et ne peut donc se substituer à la définition générale reprise dans l'énoncé. Comme demandé explicitement, c'était bien "sur base de cette définition" qu'il fallait mener la démonstration demandée.

  Une lecture attentive de l'énoncé est nécessaire pour répondre de façon appropriée à la question posée, en considérant le cadre et les hypothèses définis par celui-ci.
- La traduction correcte des deux hypothèses $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ au voisinage de x_0 demande de faire apparaître des voisinages $V_1(x_0)$ et $V_2(x_0)$ différents pour les deux fonctions f_1 et f_2. La définition permet en effet d'affirmer l'existence d'un voisinage $V(x_0)$ permettant la majoration de chacune des fonctions. Par contre, rien ne dit que ces voisinages sont les mêmes pour les deux fonctions.

Le voisinage $V_3(x_0)$ intervenant dans la thèse est quant à lui lié aux voisinages introduits dans les hypothèses : il en constitue l'intersection, puisque les deux hypothèses doivent y être vérifiées.

De façon générale, chaque fois que le quantificateur existentiel $\exists$ apparait dans une expression, la chose dont on affirme l'existence peut dépendre de tout ce qui précède. Ce n'est pas le cas des éléments introduits par le quantificateur universel $\forall$.

- On rappellera que la valeur absolue d'une somme est toujours inférieure à la somme des valeurs absolues, *i.e.*

$$|f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

ii.

- Quand on demande si un énoncé est vrai, la réponse donnée ne peut être que "OUI, il est vrai" (c'est-à-dire toujours vrai) avec une démonstration générale ou "NON, il est faux" (pas toujours vrai, voire toujours faux) avec un contre-exemple (ou plus rarement une démonstration). Répondre que l'énoncé est vrai moyennant certaines hypothèses supplémentaires n'est pas une réponse correcte.
- Quand on donne un contre-exemple. Il faut montrer qu'il vérifie les hypothèses de l'énoncé et qu'il en contredit la thèse.
- Un contre-exemple donné uniquement graphiquement ne suffisait pas. Il fallait donner l'expression analytique de la fonction pour prouver l'existence de ce contre-exemple.
- Un extremum absolu sur un domaine borné ne se situe pas forcément en un point stationnaire de la fonction (point où la dérivée s'annule). Il peut aussi se situer sur la frontière du domaine ou en un point où la fonction n'est pas dérivable. Ici, l'hypothèse de dérivabilité n'est pas donnée. On peut donc chercher un contre-exemple basé sur une fonction présentant un point anguleux comme dans la solution-type.
- Le théorème de Rolle n'est pas applicable ici puisque l'hypothèse de dérivabilité de la fonction n'est pas donnée. Ce théorème ne donnant qu'une condition suffisante de présence d'un point où la dérivée de la fonction s'annule, le fait qu'il ne soit pas applicable ne permet pas de justifier que la dérivée ne s'annule en aucun point.
- Rappelons qu'une fonction continue n'est pas forcément dérivable.

iii.

- Malgré la similitude trompeuse des notations, il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec $1/f$, l'inverse de la fonction.
- Beaucoup trop peu de réponses s'appuient sur le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques. Ce théorème est cependant au coeur de la réponse à formuler pour ce type de question. Il convient non seulement de l'utiliser mais aussi de le mentionner explicitement pour justifier le raisonnement suivi et les résultats obtenus. Plus généralement, lorsqu'on mène un raisonnement utilisant un résultat théorique, il convient de citer ce résultat ou théorème.
- Le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques permet de justifier l'existence de la fonction réciproque et de calculer la valeur de sa dérivée en chaque point de son domaine de dérivabilité sans déterminer l'expression explicite de la fonction réciproque. La fonction réciproque de sinc ne s'exprime pas au moyen de fonctions connues, ce qui n'empêche pas de répondre à la question posée.

- L'intervalle $]0,1[$ cité dans l'énoncé de la question y est présenté comme le domaine de définition de la fonction réciproque. Cet intervalle ne doit pas être confondu avec le domaine de définition de la fonction sinc ou un intervalle dans lequel varie l'argument de cette fonction. Pour répondre à la question, il convenait donc d'identifier un intervalle $]a,b[$ tel que $\operatorname{sinc}(]a,b[)=]0,1[$. Ceci conduit à identifier $]0,\pi[$ ou $]-\pi,0[$.
- On ne peut justifier le caractère monotone de la fonction $\sin x/x$ par le fait que cette expression est le quotient de deux fonctions croissantes sur $]0,\pi/2[$. Le quotient de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement monotone.
- Dans l'énoncé, on demandait de calculer la dérivée de la fonction réciproque g au point $x=2/\pi$. Contrairement à ce qu'on peut lire dans beaucoup de copies, cette dérivée est l'inverse de la dérivée de la fonction directe au point $g(x)$, pas en x lui-même.
- Il n'était pas nécessaire de calculer la dérivée de la fonction sinc en $x=0$. Cependant, si cette valeur devait être requise, on notera qu'elle ne peut être calculée en évaluant $(1)'=0$, *i.e.* en dérivant simplement la valeur particulière prise par la fonction à l'origine. On devrait revenir à la définition de la dérivée pour évaluer

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\operatorname{sinc} x}{dx}\right|_{x=0} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sinc} h-\operatorname{sinc} 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h-h}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^3}{3!}+O(h^5)}{h^2} = 0
\end{aligned}
$$

  Certes, le résultat est ici identique, mais ceci constitue la seule façon de calculer la dérivée d'une fonction en un point où elle est définie par une valeur particulière.
- Les copies font apparaître beaucoup trop d'erreurs dans le calcul de la dérivée de $\sin x/x$ ou dans le calcul des valeurs particulières de $\sin x$. De telles erreurs sur des compétences de base doivent impérativement être évitées.