LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2021

MATH0002 - Analyse Mathématique 1

Évaluation formative

Question I

i. Justifiez l'application de la formule de Taylor à la fonction $f(x) = \operatorname{arctg} x$ au voisinage de 1. Sur quel intervalle cette formule est-elle applicable ? À quel ordre peut-elle être appliquée ?

ii. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_1(x)$ de degré 1 approchant $f(x)$ au voisinage de 1 ainsi que l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_1(x)$ correspondante.

iii. Déterminez une constante C majorant l'erreur absolue $|\mathcal{R}_1(x)|$ sur l'intervalle $[1,2]$.

iv. Montrez que sur l'intervalle $[0,1]$, on a

$$|\mathcal{R}_1(x)| \leq \frac{9}{16\sqrt{3}}(x-1)^2$$

Question II

La relation entre le taux de cisaillement γ et les tensions visqueuses τ dans le sang peut être décrite par une modification du modèle de Casson se traduisant par

$$\tau = \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}\left(1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}\right)}\right]^2$$

où μ_∞, $\tau_\star$ et m désignent des paramètres strictement positifs.

Déterminez un comportement asymptotique de τ en fonction de γ

i. lorsque le taux de cisaillement est faible, *i.e.* pour $\gamma \to 0^+$;

ii. lorsque le sang est soumis à un taux de cisaillement important, *i.e.* pour $\gamma \to +\infty$.

Question III

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.

   (a) Si f et g sont asymptotiques l'une à l'autre au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$ et si f présente un extremum en x_0, alors g présente un extremum en x_0.

   (b) Si $f \in C_2(\mathbb{R})$ est une fonction réelle, périodique de période $T > 0$, alors $\exists \xi \in [0,T]$ tel que $f''(\xi) = 0$.

   (c) Si $f \in C_1(\mathtt{I})$ où $\mathtt{I}$ désigne un intervalle quelconque, alors $|f| \in C_0(\mathtt{I})$.

ii. On considère la fonction $f(x) = 2 + x + x\ln x$.

   (a) Déterminez la plus petite valeur de a telle que f admette une fonction réciproque $f^{-1} \in C_1(]a,+\infty[)$.

   (b) Calculez $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

Question I

i. Vu que arctg est réelle et indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor au voisinage de 1 quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.
En effet, on a alors arctg $\in C_n([1,x])$ ou $C_n([x,1])$ et $n+1$ fois dérivable sur $]1,x[$ ou $]x,1[$ comme attendu pour l'application de la formule de Taylor à l'ordre n.

f réelle : 1 pt
Hypothèse(s) sur la régularité de f (C_n et $n+1$ fois dérivable ou C_∞) : 1 pt
Valable $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n$: 1 pt
Total i. : 3 pts

ii. La formule de Taylor à l'ordre 1 s'écrit

$$f(x) = \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{R}_1(x)$$

avec

$$\mathcal{P}_1(x) = f(1) + (x-1)f'(1) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 = \frac{(x-1)^2}{2} f''(\xi) \text{ avec } \xi \in]1,x[\text{ ou }]x,1[$$

Les calculs conduisent à

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

d'où

$$\mathcal{P}_1(x) = \text{arctg}\, 1 + (x-1)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$$

et

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{(x-1)^2 \xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\text{ ou }]x,1[$$

Expression générale de $\mathcal{P}_1$ citée ou mise en pratique : 1 pt
Expression générale de $\mathcal{R}_1$ citée ou mise en pratique : 1 pt
Information sur la position de ξ : 1 pt
Expression exacte de $\mathcal{P}_1(x)$: 1 pt
Expression exacte de $\mathcal{R}_1(x)$: 1 pt

Total ii. : 5 pts

iii. Sur l'intervalle $[1,2]$, on a

$$|\mathcal{R}_1| = \left| \frac{-(x-1)^2 \xi}{(1+\xi^2)^2} \right| = \frac{(x-1)^2 \xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,2[$$

donc, en considérant les bornes inférieure du dénominateur et supérieure du numérateur,

$$|\mathcal{R}_1| \leq \frac{(2-1)^2\, 2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

Majoration par une constante de $\mathcal{R}_1$: 2 pts
Total iii. : 2 pts

iv. Sur l'intervalle $[0,1]$,

$$|\mathcal{R}_1| = \frac{(x-1)^2 \xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \text{avec} \quad \xi \in]0,1[$$

donc

$$|\mathcal{R}_1| \leq \frac{(x-1)^2\, 1}{(1+0)^2} = (x-1)^2$$

qui n'est pas la majoration précise attendue. Afin de majorer plus précisément cette expression, recherchons le maximum sur $[0,1]$ de

$$g(\xi) = \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}$$

Majoration grossière de $\mathcal{R}_1$ (celle-ci ou une autre) : 1 pt si seule réponse donnée

De l'examen de

$$g'(\xi) = \frac{(1+\xi^2)^2 - \xi\, 2(1+\xi^2)\, 2\xi}{(1+\xi^2)^4} = \frac{1-3\xi^2}{(1+\xi^2)^3}$$

on déduit que $g(\xi)$ est maximale en $\xi = 1/\sqrt{3}$ où

Majoration précise de $\mathcal{R}_1$: 3 pts

$$g(1/\sqrt{3}) = \frac{1/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \frac{9}{16\sqrt{3}}$$

Dès lors, on obtient comme attendu

Total iv. : 3 pts

$$|\mathcal{R}_1| \leq \frac{9}{16\sqrt{3}}(x-1)^2 \qquad \forall x \in [0,1]$$

TOTAL Q1 : 13 PTS

Question II

Soit

$$\tau = \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}})\right]^2$$

i. La formule de Taylor appliquée à la fonction réelle $\mathrm{e}^x \in C_\infty(\mathbb{R})$ permet d'écrire

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + O(x^2), \quad (x \to 0^+)$$

Lorsque le taux de cisaillemnt est faible, on a donc

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}} = 1 - \sqrt{m\gamma} + O(\gamma), \quad (\gamma \to 0^+)$$

On obtient alors successivement

Aussi ok si calcul de la limite pour $\gamma \to 0^+$ de l'expression entre crochets

$$1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}} \sim \sqrt{m\gamma}, \quad (\gamma \to 0^+)$$

et

$$\tau \sim \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}\sqrt{m\gamma}\right]^2, \quad (\gamma \to 0^+)$$

c'est-à-dire

$$\tau \sim \gamma[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{m\tau_\star}]^2, \quad (\gamma \to 0^+)$$

Total i. : 4 pts

ii. Pour les taux de cisaillement importants, on a

$$1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}} \sim 1, \quad (\gamma \to +\infty)$$

de sorte que

Abandon de l'exponentielle : 1 pt

$$\tau \sim \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}\right]^2, \quad (\gamma \to +\infty)$$

Ensuite, vu que

Abandon de $1/\sqrt{\gamma}$: 1 pt

$$\sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}} = o(\sqrt{\mu_\infty}), \quad (\gamma \to +\infty)$$

on obtient

Conclusion : 2 pts

$$\tau \sim \gamma\mu_\infty, \quad (\gamma \to +\infty)$$

Total ii. : 4 pts

TOTAL Q2 : 8 PTS

Question III

Pas de point accordé en cas de réponse correcte (Vrai/Faux) sans justification

i. (a) FAUX, comme le montre le contre-exemple suivant. On a

$$\cos x \sim 1 + x, \quad (x \to 0)$$

Or, $\cos x$ a un maximum en $x = 0$ tandis que $1 + x$ ne présente aucun extremum.

Contre-exemple correct : 2 pts

Total (a) : 2 pts

(b) VRAI.
La fonction f étant réelle et deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée f' est réelle, continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$. De plus, la fonction f étant périodique de période T, il en est de même de f' de sorte que $f'(0) = f'(T)$.
Par application du théorème de Rolle à la fonction f', nous déduisons qu'il existe un point $\xi \in]0, T[$ tel que $f''(\xi) = 0$.

f réelle : 1 pt
Hypothèse de continuité de f' sur $[0,T]$: 1 pt
Hypothèse de dérivabilité de f' sur $]0,T[$: 1 pt
Hypothèse $f'(0) = f'(T)$: 1 pt
Appel au théorème de Rolle pour f' : 1 pt
Total (b) : 5 pts

(c) VRAI.
Si $f \in C_1(I)$ alors $f \in C_0(I)$. De plus, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. Or la composition de deux fonctions continues est continue donc $|f| \in C_0(I)$.

Il est également possible de raisonner de la façon suivante.
Vu la continuité de f sur I,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta) : |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Or,

$$\Big| |f(x)| - |f(x_0)| \Big| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

de sorte que

$$\Big| |f(x)| - |f(x_0)| \Big| \leq \varepsilon, \ \ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta$$

et donc que $|f| \in C_0(I)$.

Continuité de f : 1 pt
Composition de deux fonctions continues (ou démonstration basée sur la définition de la continuité) : 2 pts
Total (c) : 3 pts

Total i. : 10 pts

ii. (a) La fonction $f(x) = 2 + x + x \ln x$ est réelle et $\in C_1(]0, +\infty[)$ avec

$$f'(x) = 1 + \ln x + 1 = 2 + \ln x > 0 \text{ sur }]1/\mathrm{e}^2, +\infty[\subset]0, +\infty[$$

puisque $\ln x > -2$ si $x > \mathrm{e}^{-2} = 1/\mathrm{e}^2$.
On a $f(]1/\mathrm{e}^2, +\infty[) =]2 - 1/\mathrm{e}^2, +\infty[$ puisque f est croissante et que

$$f(1/\mathrm{e}^2) = 2 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} + \frac{1}{\mathrm{e}^2} \ln \frac{1}{\mathrm{e}^2} = 2 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} - \frac{2}{\mathrm{e}^2} \ln \mathrm{e} = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en conclut que f possède une fonction réciproque $f^{-1} \in C_1(]2 - 1/\mathrm{e}^2, +\infty[)$.
La plus petite valeur de a recherchée est donc $a = 2 - 1/\mathrm{e}^2$.

$f \in C_1$: 1 pt
Détermination du domaine où $f' > 0$: 1 pt
$\mathrm{Im} f$: 1 pt
Valeur de a : 1 pt
Total (a) : 4 pts

(b) La dérivée de f^{-1} est donnée par

$$(f^{-1})'(x) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{2+\ln[f^{-1}(x)]}$$

Expression de $(f^{-1})'$: 2 pts

Puisque $f(1) = 2+1+\ln(1) = 3$, on a $f^{-1}(3) = 1$ et

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{2+\ln(1)} = \frac{1}{2}$$

Valeur de $(f^{-1})'(3)$: 2 pts

Total (b) : 4 pts
Total ii. : 8 pts
TOTAL Q3 : 18 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i. Toute application de la formule de Taylor (comme de n'importe quel théorème) doit commencer par la vérification des hypothèses correspondantes. En particulier, il ne faut pas oublier que la fonction doit être réelle.

   Justifier théoriquement l'application de la formule de Taylor à la fonction donnée consiste à vérifier que cette fonction remplit les hypothèses de la formule en particularisant les hypothèses générales de la formule de Taylor au cas de la fonction et du voisinage considérés. Sur base de cette analyse, on peut déterminer les valeurs de x ainsi que l'ordre n pour lesquels la formule est applicable.

   Il ne faut pas oublier de répondre explicitement aux questions posées dans l'énoncé. Ici, on demandait explicitement sur quel intervalle la formule de Taylor est applicable et à quel ordre. En général, il est bon de relire l'énoncé quand on a fini de rédiger sa réponse pour vérifier que les réponses aux questions posées sont effectivement apportées et correctement mises en évidence.

ii. • La formule de Taylor permet d'écrire ici

$$f(x) = \mathcal{P}_1(x) + \mathcal{R}_1(x)$$

   où le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$$

   Contrairement à ce qui a été observé dans de nombreuses copies, on ne peut écrire

$$\mathcal{P}_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \mathcal{R}_1(x)$$

   en confondant f et $\mathcal{P}_1$.

   • L'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{R}_1(x) = -\frac{(x-1)^2\xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\text{ ou }]x,1[$$

   La dérivée seconde intervenant dans ce reste est évaluée en un point ξ inconnu et dépendant de x. Elle n'est évaluée ni en 1, ni en x. Il est indispensable de préciser la position de ξ.

- En analyse, les angles doivent toujours être exprimés en radians. On a donc $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ et pas $\operatorname{arctg} 1 = 45°$.

iii.
- La majoration du reste consiste à estimer la plus grande valeur que celui-ci peut prendre (en valeur absolue) dans l'intervalle considéré afin d'avoir une idée de la borne supérieure de l'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme de Taylor. Quand la fonction à majorer s'exprime au moyen d'une fraction, une majoration peut être obtenue en donnant la plus grande valeur possible au numérateur et la plus petite au dénominateur (pris en valeur absolue), ce qui peut se produire pour des valeurs de ξ différentes.
- Danc cette question, on attendait une majoration par une constante sur tout l'intervalle $[1,2]$. Il fallait donc aussi majorer la puissance de $(x-1)^2$.

iv.
- Dans cette question, la majoration attendue dépend de x. C'est donc la fonction
$$g(\xi) = \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2}$$
intervenant dans l'expression du reste qui doit être majorée.
- Une majoration grossière consistant, comme au point précédent, à donner à cette fonction la plus grande valeur possible au numérateur et la plus petite au dénominateur ne permettait pas d'obtenir le résulat annoncé. Il fallait donc maximiser de façon plus précise le fonction de ξ en recherchant son maximum sur $[0,1]$.

Question II

La détermination d'un comportement asymptotique ne se résume pas au calcul d'une limite. Il convient d'identifier une fonction plus simple que l'expression étudiée et qui "se comporte" comme l'expression étudiée dans le voisinage considéré.

En particulier, les résultats $\lim_{\gamma\to 0}\tau(\gamma) = 0$ et $\lim_{\gamma\to+\infty}\tau(\gamma) = +\infty$, s'ils peuvent constituer une première étape utile pour cerner le comportement de $\tau(\gamma)$, ne permettent pas d'identifier réellement les comportements asymptotiques. On notera en particulier qu'aucune fonction n'est asymptotique à 0 (sauf la fonction nulle) ou à l'infini. La richesse et l'intérêt de l'étude du comportement asymptotique résident précisément dans la caractérisation de la façon dont la fonction tend vers 0 ou vers l'infini.

On ne peut non plus justifier un comportement asymptotique d'une fonction par l'égalité des limites. En effet,

$$\lim_{\gamma\to 0}\tau(\gamma) = \lim_{\gamma\to 0} f(\gamma) \quad \not\Rightarrow \quad \tau(\gamma) \sim f(\gamma) \qquad (\gamma \to 0)$$

Pour établir un comportement asymptotique, il convient d'identifier les différents termes qui peuvent être négligés pour simplifier l'expression. Dans ce raisonnement, il faut toujours comparer les termes deux à deux et se servir du résultat pour négliger un terme *par rapport à un autre*. Un terme n'est pas négligeable par le seul constat qu'il tend vers zéro dans le voisinage considéré ; si tous les termes tendent vers zéro, on ne peut négliger un terme que s'il tend vers zéro plus vite qu'un autre terme auquel il est additionné ou soustrait. Ainsi, on ne peut écrire

$$\sqrt{\mu_\infty}\sqrt{\gamma} + \sqrt{\tau_\star}(1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}) \sim \sqrt{\mu_\infty}\sqrt{\gamma}, \qquad (\gamma \to 0^+)$$

sous prétexte que le second terme tend vers zéro. Une analyse plus prudente montre que les deux termes sont asymptotiques à, respectivement, $\sqrt{\mu_\infty\gamma}$ et $\sqrt{\tau_\star m\gamma}$ de sorte que le second terme n'est pas négligeable par rapport au premier.

Remarquons également que la formule de Taylor ne peut être appliquée aux fonctions

$$e^{-\sqrt{m\gamma}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-\sqrt{m\gamma}}$$

autour de zéro puisque ces fonctions ne sont pas dérivables à l'origine.

Dans les réponses de ceux et celles qui se sont lancés dans le calcul des limites en 0 et à l'infini, on constate de nombreuses erreurs liées à la mauvaise identification des formes indéterminées et au calcul pour lever ces indéterminations.

On notera en particulier que

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}}{\sqrt{\gamma}}$$

est une forme indéterminée puisque le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers zéro. Pour lever l'indétermination, on peut utiliser la formule de L'Hospital et écrire, puisque la seconde limite existe,

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{-e^{-\sqrt{m\gamma}} \dfrac{-\sqrt{m}}{2\sqrt{\gamma}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{\gamma}}} = \sqrt{m}$$

De nombreuses erreurs sont observées dans l'application de cette procédure, en particulier dans la dérivation de l'exponentielle. Dans ce calcul, on ne peut prétendre que l'exponentielle domine les différentes puissances et conclure erronément que

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}}{\sqrt{\gamma}} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0$$

La domination des exponentielles par rapport aux puissances ne s'applique qu'au voisinage de $\pm\infty$, pas en 0 ou en tout autre point de la droite réelle.

Enfin, il convient de soigner les notations. Dans un grand nombre de copies, un signe d'égalité est écrit entre les expressions successives de $\tau(\gamma)$ obtenues en négligeant progressivement plusieurs termes, *e.g.*

$$\sqrt{\mu_\infty}\sqrt{\gamma} + \sqrt{\tau_\star} = \sqrt{\tau\star}, \qquad (\gamma \to 0^+)$$

Cet usage du signe d'égalité n'est pas correct ; les deux termes à gauche et à droite du signe d'égalité ne sont pas égaux. Dans cette expression, il faut utiliser le symbole $\sim$.

Question III

i. (a)
- Une fonction f extrémale en un point x_0 ne présente pas nécessairement une dérivée nulle en ce point. Ceci n'est le cas que si la fonction f est dérivable en ce point.
  Il est donc abusif de réduire l'extrémalité de f et g en x_0 à $f'(x_0) = 0$ et $g'(x_0) = 0$.
- Quand on propose un contre-exemple, il faut évidemment que ce contre-exemple vérifie les hypothèses de la proposition qu'on souhaite écarter.
  Par exemple, considérer une fonction f constante ou la fonction $f(x) = \sin x$ en $x_0 = 0$ ne permet pas d'invalider la proposition puisque ces fonctions ne présentent pas d'extrémum en $x_0 = 0$.

- On ne peut traduire l'hypothèse $f \sim g$ au voisinage de x_0 ni par $f(x_0) = g(x_0)$ ni par $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

(b)
- Lorsqu'on utilise un théorème, il convient d'en vérifier clairement toutes les hypothèses. L'application du théorème de Rolle à la fonction f' sur l'intervalle $[0,T]$ demandait donc la vérification de 4 hypothèses : caractère réel de f', continuité de f' sur $[0,T]$, dérivabilité de f' sur $]0,T[$ et égalité de f' aux extrémités de l'intervalle.
- L'annulation de la dérivée seconde d'une fonction en un point x_0 n'entraine pas forcément que ce point est un point d'inflexion. Il pourrait s'agir d'un minimum ou d'un maximum d'ordre supérieur. Considérons par exemple, $f(x) = x^4$ qui présente un minimum en $x = 0$ alors que $f''(0) = 0$.
- L'annulation de la dérivée première d'une fonction en un point n'entraine pas non plus que la dérivée seconde est nulle en ce point. Considérons par exemple $f(x) = x^2$ telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2$.

(c)
- Un contre-exemple (voir item a) permet de démontrer qu'un énoncé est faux. Un exemple ne constitue par contre jamais une démonstration de la véracité d'un énoncé.
- Les notations sont souvent mal comprises. Rappelons que $C_1(I)$ est l'ensemble des fonction une fois continument dérivables sur l'intervalle I, c'est-à-dire les fonctions continues sur I, dérivables sur I et dont la dérivée première est continue sur I.
- La première chose à déduire de l'énoncé est que la fonction f est continue sur I, $f \in C_0(I)$, puisqu'elle est continuement dérivable sur I .

ii. (a)
- Il ne faut pas confondre la fonction réproque de f avec l'inverse de f ni avec l'opposé de f.
- Pour répondre à la quesiton posée, il fallait faire appel au théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques. La recherche d'une fonction réciproque continument dérivable sur $]a,+\infty[$ demandait la vérification des 2 hypothèses du théorème. Premièrement, f doit être continument dérivable sur un certain intervalle, ici $f \in C_1]0,+\infty[)$. Ensuite, f' doit être de signe constant sur un intervalle inclu dans cet intervalle de continue dérivabilité. Ici, on a $f' > 0$ sur $]1/\mathrm{e}^2,+\infty[\subset]0,+\infty[$.

  Les hypothèses étant vérifiées, le théorème nous apprend qu'il existe une fonction réciproque continument dérivable définie sur l'image de l'intervalle sur lequel la dérivée de f est strictement positive, soit $f^{-1} \in C_1(]2 - 1/\mathrm{e}^2, +\infty[)$.

  La valeur de a recherchée était donc $2 - 1/\mathrm{e}^2$ et pas $1/\mathrm{e}^2$.

(b) Le théorème donne également l'expression de la dérivée de la fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(x) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)} = \frac{1}{2+\ln[f^{-1}(x)]}$$

et certainement pas

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2+\ln x}$$