Prof. Éric J.M.DELHEZ

Analyse Mathématique 1

Évaluation formative

Novembre 2023

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions sans aide extérieure, sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures.

- ***Indiquez lisiblement votre nom et votre prénom en MAJUSCULES ainsi que votre matricule (Format 2023...) aux emplacements prévus.***
- ***Rédigez vos réponses aux questions dans les emplacements vides prévus à cet effet sur l'énoncé. Si vous manquez de place, terminez votre réponse sur une ou plusieurs pages que vous ajouterez à la fin du questionnaire. À l'endroit prévu, indiquez clairement en majuscules et dans un cadre que votre réponse continue sur une page supplémentaire. Sur cette page complémentaire indiquez le numéro de la question à laquelle se rapporte votre réponse.***
- ***Soumettez vos copies (toutes les pages, dans l'ordre, même celles sur lesquelles vous n'auriez pas écrit) via Gradescope (www.gradescope.com) au plus tard pour le 28 novembre à 10h00.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

Le modèle mécanique de l'oscillateur amorti à un degré de liberté est caractérisé par l'équation différentielle

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

et où les constantes m, k et c sont strictement positives et représentent respectivement la masse du mobile, la raideur du ressort et la constante d'amortissement. On considère que ce mobile est abandonné en $t = 0$ sans vitesse ($\dot{x} = 0$) en $x = x_0$.

i. En résolvant ce problème différentiel dans le cas où $c < 2\sqrt{km}$, montrez que la loi du mouvement du mobile fait apparaître des oscillations périodiques d'amplitude décroissante décrites par

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\beta\cos\omega t + \gamma\sin\omega t\right)$$

où les constantes α, β, γ et ω sont à déterminer.

ii. Déterminez la période des oscillations amorties décrites en i.

Question II

Pour modéliser la propagation d'une épidémie dans la population, on peut décomposer celle-ci en deux groupes correspondant respectivement au nombre $x(t)$ d'individus sains mais susceptibles d'être contaminés et au nombre $y(t)$ des individus infectés et contagieux.

Si on suppose que le taux de propagation de l'épidémie est proportionnel à la fréquence de rencontre entre individus sains et individus infectés, l'évolution des variables $x(t)$ et $y(t)$ peut être décrite par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta\, x\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta\, x\, y \end{cases}$$

où β est une constante positive. On considère $x(0) = x_0 \neq 0$ et $y(0) = y_0 \neq 0$.

i. Montrez que la population totale est constante dans ce modèle (mortalité nulle).

ii. En exploitant le résultat établi en i., déterminez les évolutions temporelles de $x(t)$ et $y(t)$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'équation différentielle

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

est une équation linéaire homogène à coefficients constants du 2ème ordre. Elle s'écrit sous forme canonique

Justification de la méthode par la linéarité et les coefficients constants : 1 pt

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Nous considérons le polynôme caractéristique associé

Polynôme caractéristique : 1 pt

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + \frac{c}{m}z + \frac{k}{m}$$

Le réalisant de l'équation du second degré

$$z^2 + \frac{c}{m}z + \frac{k}{m} = 0$$

s'écrit

Réalisant < 0 : 1 pt

$$\rho = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$$

Il est strictement négatif puisque $c < 2\sqrt{km}$. Posant

$$\sigma = \sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{c^2}{m^2}}$$

où $\sigma > 0$, on peut donc écrire les zéros du polynôme caractéristique sous la forme

Zéros : 2 pts

$$z_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{i}{2}\sqrt{-\rho} = -\frac{c}{2m} \pm i\,\frac{\sigma}{2}$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp\left(-\frac{ct}{2m} + i\,\frac{\sigma}{2}\,t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{ct}{2m} - i\,\frac{\sigma}{2}\,t\right) \\ &= \exp\left(\frac{-ct}{2m}\right)\left[C_1 \exp\left(i\,\frac{\sigma}{2}\,t\right) + C_2 \exp\left(-i\,\frac{\sigma}{2}\,t\right)\right] \end{aligned}$$

Solution générale sous forme réelle : 3 pts, 2 pts si uniquement forme complexe

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes.
Le problème étant posé dans $\mathbb{R}$, la solution doit être exprimée sous forme réelle, c'est-à-dire

$$x(t) = \exp\left(\frac{-ct}{2m}\right)\left[A\cos\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right) + B\sin\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right)\right]$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées grâce aux conditions initiales. On a

Détermination des constantes : 2 pts

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \frac{-c}{2m}\exp\left(\frac{-ct}{2m}\right)&\left[A\cos\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right) + B\sin\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right)\right] \\ &+ \exp\left(\frac{-ct}{2m}\right)\left[-\frac{\sigma}{2}A\sin\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right) + \frac{\sigma}{2}B\cos\left(\frac{\sigma}{2}\,t\right)\right] \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \\ \dot{x}(0) = 0 = \dfrac{-c}{2m}A + \dfrac{\sigma}{2}B \end{cases}$$

On a donc

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{cx_0}{\sigma m}$$

de sorte que la solution du problème différentiel s'écrit

$$x(t) = \exp\left(\frac{-ct}{2m}\right)\left[x_0 \cos\left(\frac{\sigma}{2}t\right) + \frac{cx_0}{\sigma m}\sin\left(\frac{\sigma}{2}t\right)\right]$$

Celle-ci correspond à la solution donnée avec

Expression des paramètres : 4 pts

Total i : 14 pts

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = x_0, \quad \gamma = \frac{cx_0}{\sigma m} = \frac{cx_0}{\sqrt{4km - c^2}} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Vu l'énoncé, pas de point attribué en i. si les paramètres sont déterminés en substituant la solution proposée dans l'équation différentielle.

ii. La pulsation des oscillations amorties est donnée par $\omega = \sigma/2$ de sorte que la période correspondante vaut

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}$$

Total ii. Période correcte (éventuellement sous la forme $2\pi/\omega$) : 2 pts

TOTAL QI : 16 PTS

Question II

i. Des deux équations données, nous déduisons immédiatement que

Intégrale première : 2 pts

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$$

On en déduit aisément l'intégrale première $x(t) = -y(t) + C$, où C est une constante, c'est-à-dire

Détermination de la constante (ici ou plus loin) : 1 pt

$$x(t) + y(t) = C \qquad (\diamondsuit)$$

qui traduit le fait que la population totale est constante dans ce modèle.

Les conditions initiales $x(0) = x_0 \neq 0$ et $y(0) = y_0 \neq 0$ permettent de déterminer $C = x_0 + y_0 \neq 0$.

Total i. : 3 pts

ii. De l'intégrale première ($\diamondsuit$), on déduit que $y = C - x$. Ce résultat peut être exploité pour éliminer y dans la première équation donnée et obtenir

Élimination d'une fonction inconnue : 2 pts

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(x - C) \qquad (\spadesuit)$$

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables pour la seule inconnue $x(t)$. Dès lors, à condition que x diffère de 0 et de C, on a

Principe de la séparation des variables : 1 pt

$$\int \frac{dx}{x(x-C)} = \beta \int dt + K = \beta t + K$$

où K est une constante.

Remarquons que les solutions singulières (constantes) $x(t) = 0$ et $x(t) = C$ de l'équation (♠) impliqueraient respectivement qu'il n'y ait que des individus infectés (c'est-à-dire $x(t) = 0$ et $y(t) = C$) ou que des individus sains (c'est-à-dire $x(t) = C$ et $y(t) = 0$), ce qui n'est pas compatible avec les conditions initiales données. Ces solutions ne doivent donc pas être prises en compte.

Rejet des solutions singulières : 1 pt

Une primitive de la fonction de x est calculée en écrivant la fonction comme une somme de fractions simples. On a

Valeur de la primitive : 4 pts

$$\frac{1}{x(x-C)} = \frac{1}{C}\,\frac{C-x+x}{x(x-C)} = \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-C}\right)$$

de sorte que

$$\int \frac{dx}{x(x-C)} = \int \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-C}\right)dx = \frac{1}{C}\left(-\ln|x|+\ln|x-C|\right) = \frac{1}{C}\ln\left|\frac{x-C}{x}\right|$$

On a donc

$$\frac{1}{C}\ln\left|\frac{x-C}{x}\right| = \beta t + K$$

ou encore

$$\frac{x-C}{x} = D\,\mathrm{e}^{C\beta t}$$

Solution générale implicite pour la première fonction : 1 pt

où D est une constante. En résolvant par rapport à x, on obtient

$$x(t) = \frac{C}{1-D\,\mathrm{e}^{C\beta t}}$$

Solution générale explicite pour la première fonction : 1 pt

puis, en utilisant l'intégrale première $y = C - x$,

$$y(t) = \frac{-CD\,\mathrm{e}^{C\beta t}}{1-D\,\mathrm{e}^{C\beta t}}$$

Solution générale explicite pour la deuxième fonction : 2 pts

Les conditions initiales, qui ont déjà permis de déterminer $C = x_0 + y_0$, permettent aussi de déterminer la constante D. On a

Détermination de D : 1 pt

$$x_0 = x(0) = \frac{C}{1-D} = \frac{x_0+y_0}{1-D}$$

c'est-à-dire

$$D = -\frac{y_0}{x_0}$$

En conclusion, les évolutions temporelles recherchées sont

Expression de $x(t)$ et $y(t)$: 2 pts

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0(x_0+y_0)}{x_0+y_0\,\mathrm{e}^{(x_0+y_0)\beta t}} \\ y(t) &= \frac{y_0(x_0+y_0)\,\mathrm{e}^{(x_0+y_0)\beta t}}{x_0+y_0\,\mathrm{e}^{(x_0+y_0)\beta t}} \end{aligned}$$

Total ii. : 15 pts

TOTAL QII : 18 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i.
- L'application de toute méthode de résolution doit être justifiée par la vérification des hypothèses correspondantes. En particulier ici, la détermination de la solution générale de l'équation par la méthode du polynôme caractéristique devait être justifiée par la linéarité de celle-ci et par le caractère constant de ses coefficients.
- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas (en tant que fonction réelle). Dès lors, si le réalisant $\rho = b^2 - 4ac$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est négatif, les deux racines complexes de cette équation s'écrivent

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\rho}}{2a}$$

  où l'argument de la racine carrée est strictement positif. Les expressions

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\rho}}{2a}$$

  ne sont pas correctes.
- Dans un problème posé dans le domaine réel (équation réelle, conditions auxiliaires réelles), il est judicieux d'utiliser les fonctions trigonométriques cosinus et sinus pour exprimer les solutions fondamentales des équations différentielles linéaires en lieu et place des fonctions exponentielles imaginaires. Les calculs relatifs à la détermination des constantes d'intégration s'en trouvent grandement facilités. De plus, la solution d'un problème posé dans le domaine réel doit toujours être exprimée comme telle.
- La détermination des constantes d'intégration demandait de dériver la loi du mouvement $x(t)$ afin d'exprimer $\dot{x}(0)$. De trop nombreuses erreurs ont été constatées dans la dérivation du produit intervenant dans $x(t)$.
- Il était explicitement demandé de donner les valeurs des constantes α, β, γ et ω. C'est l'expression de celles-ci en fonction des paramètres du problème posé, m, c, k et x_0, qui était attendue.

ii. Les oscillations de la solution sont de la forme $\beta\cos\omega t + \gamma\sin\omega t$ où les fonctions $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$ sont caractérisées par la même pulsation ω. La période d'oscillation correspondante est donc $T = 2\pi/\omega$. Il s'agit d'une propriété connue qu'il est inutile d'établir explicitement.

Question II

- Il est indispensable de bien comprendre le problème posé. Il s'agit ici d'un système de deux équations différentielles linéaires ordinaires du premier ordre. Les deux fonctions inconnues sont notées x et y et la variable est le temps t.
- La résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires passe souvent par l'écriture et la résolution d'une équation différentielle ordinaire à une inconnue. La solution de cette équation permet ensuite l'élimination de cette inconnue dans les

équations du système. Dans le cas d'un système de deux équations différentielles ordinaires, on obtient alors une deuxième équation à une inconnue qu'il reste à résoudre. La méthode pour obtenir la première équation à une inconnue varie d'un système à l'autre. Parfois, une des équations du système ne comporte déjà qu'une inconnue. Dans les systèmes ne comportant que des équations linéaires, on sait que l'ordre de l'équation à une inconnue est (au plus) égal à la somme des ordres des équations du système. Par exemple, un système de deux équations linéaires d'ordre 1 est équivalent à une équation linéaire d'ordre 2. Il est donc souvent nécessaire de dériver une des équations pour procéder à l'élimination désirée.

Dans d'autres cas, comme celui de cet exercice, le système donne lieu à une intégrale première reliant les fonctions inconnues. Cette intégrale première permet l'élimination d'une inconnue. Dans le cas d'un système de deux équations différentielles ordinaires, on obtient alors une équation à une inconnue qu'il reste à résoudre. C'était bien la méthode qui était suggérée dans l'énoncé : déterminer une intégrale première en i. puis utiliser ce résultat pour résoudre le système en ii.

i.
- Il ne faut pas oublier la constante d'intégration quand on écrit une intégrale première. L'intégrale première à obtenir ici ne s'écrivait pas $x = -y$ mais $x = -y + C$ où C est une constante.

ii.
- Il n'était pas possible de résoudre directement une des équations du système. En particulier, il est erroné d'interpréter la première équation comme une équation à variables séparables en écrivant

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\beta y dt = -\beta yt + \text{constante}$$

  puisque la fonction $y(t)$ est inconnue à ce stade et que, ne connaissant pas sa dépendance en t, il n'est pas possible d'en déterminer une primitive.
- La méthode de séparation des variables fait souvent apparaitre des solutions singulières qui doivent être prises en compte si elles vérifient les conditions auxiliaires du problème posé. Ce n'était pas le cas ici. Les solutions singulières correspondaient à l'absence totale d'une des populations, ce qui n'était pas compatible avec les conditions initiales données.
- La résolution de ce système de deux équation différentielles du premier ordre fait apparaitre deux constantes d'intégration qu'il faut déterminer en utilisant les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$.