Novembre 2021

Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

ÉVALUATION FORMATIVE

Question I

Montrez que les fonctions $y_1(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{-\sin x}$ constituent un ensemble fondamental de solutions de l'équation $y'' + (\mathrm{tg}\, x)\, y' - (\cos^2 x)\, y = 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Justifiez.

Question II

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} (x-2)\, y''' + 2x^2 y' + y = \mathrm{e}^{-x} \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2 \end{cases}$$

Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ le théorème d'existence et d'unicité garantit-il l'existence d'une solution unique ? Justifiez.

Question III

On considère l'équation différentielle

$$y'' + m\, y = \cos 2x$$

où m désigne un paramètre réel.

i. Déterminez la solution générale de cette équation différentielle en discutant en fonction du paramètre m.
ii. Déterminez complètement la solution $y(x)$ dans le cas où $m = 1$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

Tout ensemble fondamental de solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 est constitué de 2 fonctions. Les fonctions y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions sur $]-\pi/2,\pi/2[$ de l'équation d'ordre 2 donnée si elles vérifient l'équation et sont linéairement indépendantes sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Concept d'ensemble fondamental : 1 pt

Notons tout d'abord que les fonctions

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-\sin x}$$

sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + (\operatorname{tg} x)\, y' - (\cos^2 x)\, y = 0$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$. En effet, $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[$,

Vérification de l'équation par y_1 et y_2 : 1 pt

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \cos x\ \mathrm{e}^{\sin x} & y_1''(x) &= (-\sin x + \cos^2 x)\ \mathrm{e}^{\sin x} \\ y_2'(x) &= -\cos x\ \mathrm{e}^{-\sin x} & y_2''(x) &= (\sin x + \cos^2 x)\ \mathrm{e}^{-\sin x} \end{aligned}$$

de sorte que

$$y_1''(x) + (\operatorname{tg} x)\, y_1'(x) - (\cos^2 x)\, y_1(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\left(-\sin x + \cos^2 x + \operatorname{tg} x\ \cos x - \cos^2 x\right) = 0$$

et

$$y_2''(x) + (\operatorname{tg} x)\, y_2'(x) - (\cos^2 x)\, y_2(x) = \mathrm{e}^{-\sin x}\left(\sin x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x\ \cos x - \cos^2 x\right) = 0$$

Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $]-\pi/2,\pi/2[$ puisque leur Wronskien

$$\mathrm{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\sin x} & \mathrm{e}^{-\sin x} \\ \cos x\ \mathrm{e}^{\sin x} & -\cos x\ \mathrm{e}^{-\sin x} \end{vmatrix} = -2\cos x$$

ne s'annule pas identiquement sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Vérification de l'indépendance linéaire : 3 pts (dont 1 pt pour la méthode)
Pas de pénalité si le "identiquement" manque.
Pénalité de 1 pt si la justification se base sur l'annulation de W en dehors de l'intervalle.

Alternativement, on peut montrer que les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $]-\pi/2,\pi/2[$ en utilisant la définition de l'indépendance linéaire, *i.e.*

$$c_1\,\mathrm{e}^{\sin x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\sin x} = 0 \quad \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[\qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = 0$$

Considérant l'annulation de la combinaison linéaire en $x = 0$ et $x = \pi/6$, on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\,\mathrm{e}^{1/2} + c_2\,\mathrm{e}^{-1/2} = 0 \end{cases}$$

La seule solution de ce système étant $c_1 = c_2 = 0$, ceci démontre l'indépendance linéaire des deux solutions sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

En conclusion, les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

TOTAL QI : 5 PTS

Question II

Pour pouvoir appliquer le théorème d'existence et d'unicité, il faut d'abord remarquer que l'équation différentielle

Linéarité de l'équation : 1 pt

$$(x-2)\,y''' + 2x^2 y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

est linéaire et l'écrire sous la forme canonique

Mise sous forme canonique : 1 pt

$$y''' + \frac{2x^2}{x-2}\,y' + \frac{1}{x-2}\,y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-2}$$

Les coefficients de l'équation et son terme indépendant étant continus sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, le théorème d'existence et d'unicité garantit l'existence de solutions sur les intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

Continuité des coefficients : 1 pt

L'équation différentielle étant assortie de conditions de Cauchy en $x = 1 \in]-\infty, 2[$, le théorème assure l'unicité de la solution du problème différentiel sur l'intervalle $]-\infty, 2[$

Choix de l'intervalle et justification : 2 pts

TOTAL QII : 5 PTS

Question III

i. L'équation

$$y'' + m\,y = \cos 2x$$

est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale $y(x)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation non homogène.

Décomposition de la solution en $y_h + y_p$ (annoncée ou mise en pratique) : 2 pts, dont 1 pt pour la justification par la linéarité.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$y'' + m\,y = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $\mathcal{L}(z) = z^2 + m$ dont la nature des zéros dépend du paramètre m.

Polynôme caractéristique : 2 pts, pas de pénalité si la justification "linéaire à coefficients constants" manque.

(a) Si $m < 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède les deux zéros réels $z = \pm\sqrt{-m}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

Zéros si $m < 0$: 1 pt

$$y_h(x) = A\exp(\sqrt{-m}\,x) + B\exp(-\sqrt{-m}\,x)$$

ou encore

$$y_h(x) = C\,\mathrm{ch}(\sqrt{-m}\,x) + D\,\mathrm{sh}(\sqrt{-m}\,x)$$

$y_h(x)$ si $m < 0$: 2 pts (forme alternative pas attendue)

où A, B, C et D sont des constantes.

(b) Si $m = 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède le zéro double $z = 0$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

Zéro si $m = 0$: 1 pt

$y_h(x)$ si $m = 0$: 2 pts

$$y_h(x) = (A\,x + B)\,\exp(0x) = A\,x + B$$

où A et B sont des constantes.

(c) Si $m > 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède les deux zéros complexes conjugués $z = \pm i\sqrt{m}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

$$y_h(x) = A\exp(i\sqrt{m}\,x) + B\exp(-i\sqrt{m}\,x)$$

ou encore, sous forme réelle,

Zéros si $m > 0$: 1 pt

$$y_h(x) = C\cos(\sqrt{m}\,x) + D\sin(\sqrt{m}\,x)$$

$y_h(x)$ si $m > 0$: 2 pts (forme réelle ou non)

où A, B, C et D sont des constantes.

Cherchons à présent une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation non homogène. La fonction $f(x) = \cos 2x$ est la partie réelle de la fonction e^{2ix}. Comme l'équation est linéaire à coefficients constants réels, une solution particulière de l'équation

$$y'' + m\,y = \cos 2x$$

peut être obtenue en considérant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$y'' + m\,y = \mathrm{e}^{2ix} \qquad (\heartsuit)$$

dont le second membre est de la forme exponentielle-polynôme. Nous pouvons alors rechercher une solution particulière de ($\heartsuit$) de la forme

Utilisation d'une méthode appropriée : 2 pts dont 1 pt pour la justification adaptée à la méthode

$$\tilde{y}_p(x) = K\,x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{2ix}$$

où K est une constante et α est la multiplicité de $2i$ comme zéro du polynôme caractéristique. Deux cas se présentent alors :

(a) Si $m \neq 4$, $2i$ n'est pas un zéro de $\mathcal{L}(z)$, $\alpha = 0$ et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$\tilde{y}_p(x) = K\,\mathrm{e}^{2ix}$$

En introduisant cette solution dans l'équation ($\heartsuit$), nous obtenons

$$-4K\,\mathrm{e}^{2ix} + mK\,\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

soit

$$K = \frac{1}{m-4}$$

et donc

$y_p(x)$ si $m \neq 4$: 2 pts

$$y_p(x) = \Re\left[\frac{1}{m-4}\,\mathrm{e}^{2ix}\right] = \Re\left[\frac{1}{m-4}(\cos 2x + i\sin 2x)\right] = \frac{\cos 2x}{m-4}$$

(b) Si $m = 4$, $2i$ est un zéro simple de $\mathcal{L}(z)$, $\alpha = 1$ et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$\tilde{y}_p(x) = K\,x\,\mathrm{e}^{2ix}$$

Introduisant comme ci-dessus cette solution dans l'équation ($\heartsuit$), nous obtenons

$$K(4i - 4x)\,\mathrm{e}^{2ix} + 4Kx\,\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

soit

$$K = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$$

et donc

$y_p(x)$ si $m = 4$: 3 pts

$$y_p(x) = \Re\left[\frac{-i}{4}\,x\,\mathrm{e}^{2ix}\right] = \Re\left[\frac{-i}{4}\,x(\cos 2x + i\sin 2x)\right] = \frac{x\sin 2x}{4}$$

En conclusion, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit

- Si $m < 0$,

$$y(x) = C\,\mathrm{ch}(\sqrt{-m}\,x) + D\,\mathrm{sh}(\sqrt{-m}\,x) + \frac{\cos 2x}{m-4}$$

Solution générale si $m < 0$ sous une forme ou une autre : 1 pt

- Si $m = 0$,

$$y(x) = Ax + B + \frac{\cos 2x}{m-4} = Ax + B - \frac{\cos 2x}{4}$$

Solution générale si $m = 0$: 1 pt, seulement attribué si m est remplacé par 0.

Alternativement, dans le cas $m = 0$, on peut résoudre l'équation différentielle par intégration directe. On a successivement

La résolution de ce cas isolé donne droit à 4 pts

$$\begin{aligned} y'' &= \cos 2x \\ y' &= \frac{1}{2}\sin 2x + A \\ y &= -\frac{1}{4}\cos 2x + Ax + B \end{aligned}$$

- Si $m > 0$ et $m \neq 4$,

$$y(x) = C\cos(\sqrt{m}\,x) + D\sin(\sqrt{m}\,x) + \frac{\cos 2x}{m-4}$$

Solution générale (sous forme réelle ou pas) si $m > 0$ et $m \neq 4$: 1 pt

- Si $m = 4$,

$$y(x) = C\cos 2x + D\sin 2x + \frac{x\sin 2x}{4}$$

Solution générale (sous forme réelle ou pas) si $m = 4$: 1 pt, seulement attribué si m est remplacé par 4

Total i. : 24 pts

ii. La solution générale dans le cas $m = 1$, s'écrit

Solution générale si $m = 1$: 1 pt

$$y(x) = C\cos x + D\sin x - \frac{\cos 2x}{3}$$

de sorte que

$$y'(x) = -C\sin x + D\cos x + \frac{2}{3}\sin 2x$$

Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ conduisent aux relations

Détermination des constantes : 3 pts

$$\begin{cases} C - \dfrac{1}{3} = 1 \quad \text{soit} \quad C = \dfrac{4}{3} \\ D = 0 \end{cases}$$

La solution du problème s'écrit donc

Solution du problème : 2 pts (dont 1 pt pour la forme réelle)

$$y(x) = \frac{4}{3}\cos x - \frac{\cos 2x}{3}$$

Total ii. : 6 pts

Si ce seul cas particulier est résolu complètement : 12 pts éventuellement cumulables avec les 4 pts du cas $m = 0$

TOTAL QIII : 30 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Des fonctions constituent un ensemble fondamental de solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 sur un intervalle donné si elles remplissent les 3 conditions suivantes :
  - ◇ Elles sont au nombre de 2.
  - ◇ Elles vérifient l'équation différentielle.
  - ◇ Elles sont linéairement indépendantes sur cet intervalle.

  Pour répondre à la question posée, il ne suffisait donc pas de montrer que les 2 fonctions vérifiaient l'équation ou qu'elles étaient linéairement indépendantes. Il fallait vérifier les trois conditions.
- Des fonctions sont linéairement indépendantes sur un intervalle $\mathtt{I}$ si leur Wronskien ne s'annule pas identiquement sur $\mathtt{I}$, c'est-à-dire s'il n'est pas égal à 0 partout dans cet intervalle. Le Wronskien pourrait s'annuler en certains points de $\mathtt{I}$ sans que ceci ne remette en cause l'indépendance linéaire.
- Toute solution d'une équation différentielle linéaire homogène peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions formant un ensemble fondamental de solutions de cette équation.

  On ne peut adopter le raisonnement inverse et affirmer que des fonctions forment un ensemble fondamental de solutions d'une équation différentielle en montant que leur combinaison linéaire vérifie cette équation. En procédant de la sorte, on ne démontre pas toutes les propriétés pertinentes des solutions. Dès qu'une équation est linéaire et homogène, toute combinaison linéaire de solutions vérifie l'équation, que ces solutions constituent un système fondamental ou non.

Question II

- La linéarité de l'équation différentielle constitue une hypothèse essentielle du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Cette hypothèse doit être invoquée pour en justifier l'application.
- Avant de vérifier la continuité des coefficients et du terme indépendant de l'équation, hypothèse du théorème d'existence et d'unicité de la solution, il faut écrire l'équation sous forme canonique en divisant celle-ci par le coefficient multipliant la dérivée d'ordre le plus élevé.
- Pour justifier l'unicité de la solution de l'équation d'ordre 3 considérée en invoquant le théorème d'existence et d'unicité, il faut que les conditions auxiliaires fixent la valeur de la fonction inconnue et de ses deux premières dérivées en un point x_0. Ici, ces conditions dites de Cauchy sont données en $x_0 = 1$.
- Les résultats théoriques permettent d'affirmer que la solution existe et est unique sur l'*intervalle* $\mathtt{I}$ contenant le point $x_0 = 1$ où les conditions de Cauchy sont données et sur lequel les coefficients et le terme indépendant de l'équation écrite sous forme canonique sont continus. Cet intervalle est donc ici $\mathtt{I} =]-\infty, 2[$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ n'est pas un intervalle mais l'union de deux intervalles. Il faut choisir l'intervalle dans lequel les conditions de Cauchy sont données.

Question III

- Quand une méthode ou un théorème est appliqué, il faut en vérifier les hypothèses.
  - ◇ Le théorème de structure, permettant de décomposer la solution générale en la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation non homogène, ne s'applique qu'à une équation linéaire.
  - ◇ La méthode du polynôme caractéristique permettant de trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène demande que l'équation soit linéaire à coefficients constants.
  - ◇ La méthode de variation des constantes est réservée aux équations linéaires.
  - ◇ La méthode de l'exponentielle-polynôme pour la recherche d'une solution particulière demande que l'équation soit linéaire à coefficients constants et que le terme indépendant puisse s'exprimer comme le produit d'une exponentielle et d'un polynôme.
- La méthode du polynôme caractéristique se base sur les zéros complexes de ce polynôme et leur multiplicité. Dans cet exercice, la nature des zéros de $\mathcal{L}(z) = z^2 + m$ dépend du paramètre m.
  - ◇ Si $m = 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède un zéro double $z = 0$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

    $$y_h(x) = (Ax + B)\exp(0x) = Ax + B$$

  - ◇ Si $m < 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède les zéros $z = \pm\sqrt{-m}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

    $$y_h(x) = A\exp(\sqrt{-m}\,x) + B\exp(-\sqrt{-m}\,x)$$

    De trop nombreux étudiants oublient le signe moins sous la racine.
  - ◇ Si $m > 0$, $\mathcal{L}(z)$ possède les zéros complexes conjugués $z = \pm i\sqrt{m}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

    $$y_h(x) = A\exp(i\sqrt{m}\,x) + B\exp(-i\sqrt{m}\,x)$$

    que l'on transforme avantageusement sous la forme réelle

    $$y_h(x) = C\cos(\sqrt{m}\,x) + D\sin(\sqrt{m}\,x)$$

- Dans le cas $m = 4$, la méthode de l'exponentielle-polynôme suggère de rechercher une solution du type $Kx\mathrm{e}^{2ix}$ puisque $2i$, le coefficient de la variable x dans l'exponentielle, est un zéro simple du polynôme caractéristique de l'équation homogène.
  Dans ce cas, il n'est pas possible de trouver une solution particulière de l'équation complète du type $K\mathrm{e}^{2ix}$, puisque les fonctions de ce type vérifient l'équation homogène pour $m = 4$. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de solution mais bien qu'il faut en trouver une d'une autre forme.
  Si la méthode des coefficients indéterminés est utilisée, il n'est pas non plus possible de trouver une solution du type $A\cos 2x + B\sin 2x$. La méthode de l'exponentielle polynôme suggère cependant de rechercher une solution de la forme $Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$.