Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2022

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f(x) = g(x) + o(x^3)$ au voisinage de l'origine, peut-on affirmer que $f \sim g$ pour $x \to 0$? Justifiez.

ii. Établissez le polynôme de MacLaurin de la fonction e^x à l'ordre n, en justifiant, et déduisez-en que

$$\lim_{n\to\infty}\left[e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right] = 0$$

iii. Les fonctions $\sin x$ et $\dfrac{\sin x}{x}$ sont-elles linéairement indépendantes sur $]0,\pi[$? Justifiez.

iv. Si f est réelle et différentiable sur $\mathbb{R}^3$, quelle interprétation géométrique peut-on donner à

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla f(\mathrm{x}_0)}{\|\nabla f(\mathrm{x}_0)\|}$$

(en supposant $\nabla f(\mathrm{x}_0) \neq \mathbf{0}$) ? Que vaut $D_{\mathbf{e}} f$ en x_0 ?

v. Si $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ présente un point de selle en x_0, la matrice hessienne en ce point peut-elle être semi-définie positive ? Justifiez.

Question II

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

i. Déterminez une solution de ce problème.

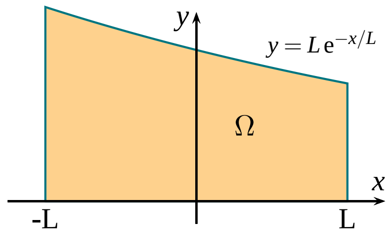
ii. La solution est-elle unique ? Sur quel intervalle ? Justifiez.

Tournez la page.

Question III

On considère l'ensemble Ω représenté ci-contre et décrivant une section de tuyère ainsi que les relations

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{L} \\ \eta = \dfrac{y}{L\,\mathrm{e}^{-x/L}} \end{cases}$$



i. Montrez que ces relations permettent de définir un changement de variables régulier d'ordre infini entre des ouverts Ω et Ω' à identifier.
ii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et Δ en fonction des variables ξ et η.

L'expression de Δ dans les nouvelles variables est plus compliquée que l'expression initiale mais le domaine dans lequel l'équation $\Delta\phi = 0$ décrivant l'écoulement doit être résolue est plus simple. C'est là l'avantage du changement de variables.

Question I

i. De la relation $f(x) = g(x) + o(x^3)$ au voisinage de l'origine, on ne peut pas déduire que $f \sim g$ pour $x \to 0$.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions $f(x) = x^5 + x^4$ et $g(x) = x^5$ qui vérifient bien la relation

$$x^5 + x^4 = x^5 + o(x^3), \qquad (x \to 0)$$

mais qui ne sont pas asymptotiques l'une à l'autre.

ii. La fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la formule de MacLaurin peut lui être appliquée à un ordre quelconque. Puisque $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^0 \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \mathrm{e}^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in]0,1[$$

Exploitant ces résultats pour $x = 1$, il vient

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!}, \quad \theta \in]0,1[$$

Puisque $\mathrm{e}^\theta < \mathrm{e}$, il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!} = 0$$

iii. Pour tester l'indépendance des fonctions $\sin x$ et $\dfrac{\sin x}{x}$, on considère le Wronskien

$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \dfrac{\sin x}{x} \\ \cos x & \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{x \cos x \sin x}{x^2} - \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{\cos x \sin x}{x} = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Puisque le Wronskien n'est pas identiquement nul sur $]0,\pi[$, les fonctions sont linéairement indépendantes sur cet intervalle.

De façon alternative, en faisant appel à la définition de l'indépendance linéaire, on sait que les fonctions considérées sont linéairement indépendantes sur $]0,\pi[$ si

$$C_1 \sin x + C_2 \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \forall x \in]0,\pi[\qquad \Rightarrow \qquad C_1 = C_2 = 0$$

Or, en considérant la combinaison linéaire en $x = \pi/4$ et $x = \pi/2$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} C_2 = 0 \\ \\ C_1 + \dfrac{2C_2}{\pi} = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet la seule solution $C_1 = C_2 = 0$. Dès lors, les fonctions sont effectivement linéairement indépendantes sur l'intervalle $]0,\pi[$.

iv. Si f est différentiable en x_0, la direction

$$\mathbf{e} = \frac{\nabla f(\mathsf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathsf{x}_0)\|}$$

portée par le gradient de f en x_0 indique la direction de l'espace selon laquelle la fonction f augmente le plus rapidement.

La dérivée de f dans la direction de $\mathbf{e}$ est donnée par

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathsf{x}_0) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(\mathsf{x}_0) = \frac{\nabla f(\mathsf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathsf{x}_0)\|} \cdot \nabla f(\mathsf{x}_0) = \|\nabla f(\mathsf{x}_0)\|$$

v. Une fonction qui possède un point de selle en x_0 peut présenter une matrice hessienne semi-définie positive en ce point. La fonction

$$f(x,y) = x^2 - y^4$$

en donne une illustration. En effet, d'une part les fonctions d'une variable $F(x) = f(x,0) = x^2$ et $G(y) = f(0,y) = -y^4$ présentent respectivement un minimum et un maximum en $x = y = 0$, de sorte que f possède un point de selle en $\mathsf{x}_0 = (0,0)$. D'autre part, la matrice hessienne en ce point est donnée par

$$\mathsf{H}(0,0) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est semi-définie positive.

Question II

i. L'équation

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}$$

est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale $y(t)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé z^2+2z+1 qui possède le zéro double $z=-1$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$y_h(t)=(At+B)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où A et B sont des constantes.

La méthode de variation des constantes permet ensuite de déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$y_p(t)=\left(\int C_1(t)dt\right)y_1(t)+\left(\int C_2(t)dt\right)y_2(t)$$

où $y_1(t)=t\,\mathrm{e}^{-t}$ et $y_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène du deuxième ordre associée et où $C_1(t)$ et $C_2(t)$ vérifient

$$\begin{cases} C_1\,y_1+C_2\,y_2=0 \\ C_1\,y_1'+C_2\,y_2'=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} C_1\,t\,\mathrm{e}^{-t}+C_2\,\mathrm{e}^{-t}=0 \\ C_1\,\mathrm{e}^{-t}(1-t)-C_2\,\mathrm{e}^{-t}=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} C_1\,t+C_2=0 \\ C_1(1-t)-C_2=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

De là,

$$\begin{cases} C_1(t)=\dfrac{1}{1+t^2} \\ C_2(t)=-\dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

On calcule alors successivement

$$\int C_1(t)\,dt=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg}t$$

et

$$\int C_2(t)\,dt=\int\frac{-t}{1+t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$$

Une solution particulière s'écrit donc

$$y_p(t)=t\,\mathrm{e}^{-t}\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}\left[t\,\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]$$

Ceci permet d'exprimer la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$y(t)=\mathrm{e}^{-t}\left[At+B+t\,\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]$$

Les conditions auxiliaires conduisent à

$$y(0)=B=0$$

et

$$y(1)=\mathrm{e}^{-1}\left(A+B+\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\ln 2\right)=0$$

ce qui permet de fixer les constantes d'intégration selon

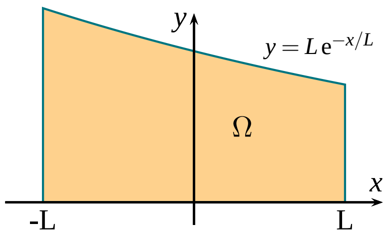
$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

La solution du problème s'écrit alors

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left[\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)t + t\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]$$

ii. Les coefficients et le terme indépendant de l'équation différentielle étant continus sur $\mathbb{R}$, celle-ci possède des solutions $y \in \mathbb{C}_2(\mathbb{R})$ qui s'expriment au moyen de deux constantes.
Les développements ci-dessus montrent que les conditions auxiliaires permettent de déterminer de façon unique les deux constantes d'intégration.
La solution est donc unique sur $\mathbb{R}$.
Notons que les conditions auxiliaires données ne sont pas des conditions de Cauchy. On ne peut donc pas invoquer le théorème d'existence et d'unicité pour justifier l'unicité.

Question III



i. L'image de l'ouvert $\Omega = \left\{(x,y) : -L < x < L,\ 0 < y < L\,\mathrm{e}^{-x/L}\right\}$ par

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{L} \\ \eta = \dfrac{y}{L\,\mathrm{e}^{-x/L}} \end{cases} \tag{†}$$

est

$$\Omega' = \{(\xi,\eta) : -1 < \xi < 1,\ 0 < \eta < 1\}$$

Étudions à présent la régularité du changement de variables entre Ω et Ω'.

- Les relations (†) peuvent être inversées sous la forme

$$\begin{cases} x = L\xi \\ y = L\eta\,\mathrm{e}^{-\xi} \end{cases}$$

  Elles définissent donc une bijection entre Ω et Ω'.
- Les fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ appartiennent à $C_\infty(\Omega)$.

- Le jacobien

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1/L & 0 \\ \dfrac{y\,\mathrm{e}^{x/L}}{L^2} & \dfrac{\mathrm{e}^{x/L}}{L} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{x/L}}{L^2}$$

  est non nul sur Ω.

Les relations (†) définissent donc un changement de variables régulier d'ordre infini entre Ω et Ω'.

ii. Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{y\,\mathrm{e}^{x/L}}{L^2}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\mathrm{e}^{x/L}}{L}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Le Laplacien s'exprime en coordonnées cartésiennes suivant

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En considérant que la fonction à laquelle s'applique le Laplacien est au moins C_2 (pour pouvoir considérer que $\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}$), on obtient successivement

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$= \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\eta}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\eta}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\eta}{L^2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\eta^2}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$= \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2\eta}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\eta}{L^2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\eta^2}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{L}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2\xi}}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

de sorte que

$$\Delta = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2\eta}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\eta}{L^2}\frac{\partial}{\partial\eta} + \left(\frac{\eta^2}{L^2} + \frac{\mathrm{e}^{2\xi}}{L^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$