Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2016

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom, section et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Quand dit-on d'une fonction f qu'elle est négligeable par rapport à une fonction g au voisinage de $+\infty$? Définissez mathématiquement le concept et citez un exemple.

ii. Si les fonctions f et g sont asymptotiques l'une à l'autre au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et si f présente un extremum en x_0, peut-on affirmer que g présente également un extremum en x_0 ? Justifiez.

iii. Si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes sur $]2,3[$, les fonctions $xy_1(x)$ et $xy_2(x)$ sont-elles également linéairement indépendantes sur $]2,3[$? Justifiez.

iv. Les variations spatiales et temporelles de la masse volumique de l'eau de mer peuvent être décrites par la fonction composée

$$\rho(x,y,z,t) = R[T(x,y,z,t), S(x,y,z,t)]$$

où $R : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décrit la dépendance de la masse volumique en la température et la salinité et où les fonctions T et S décrivent les variations spatiales et temporelles de la température absolue et de la salinité.

Déterminez l'expression de $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ en fonction des dérivées des fonctions R, T et S.

Précisez un ensemble minimum d'hypothèses sur les fonctions R, T et S assurant la validité de votre résultat.

v. Établissez la relation

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$$

où $\mathbf{f}$ désigne un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$.

Précisez un ensemble minimum d'hypothèses sur la fonction $\mathbf{f}$ assurant la validité de la formule.

Tournez la page.

Question II

i. Énoncez la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et précisez les hypothèses correspondantes.

ii. Pour résoudre de façon approchée l'équation

$$x + \operatorname{arctg} x = 2 \tag{†}$$

on décide de remplacer le membre de gauche par son approximation par un polynôme de Taylor de degré 2.

(a) Sur quel intervalle la formule de Taylor permettant d'approcher $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ au voisinage de $a = 1$ par un polynôme $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x - a)$ est-elle applicable ? Justifiez.

(b) Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ approchant $f(x)$ au voisinage de $a = 1$ et l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.

(c) Déterminez une constante C majorant l'erreur $|\mathcal{R}_2(x)|$ sur l'intervalle $[1, 3/2]$.

(d) On appelle $\tilde{x}$ la solution de l'équation $\mathcal{P}_2(\tilde{x}) = 2$ appartenant à l'intervalle $[1, 3/2]$. Cette solution $\tilde{x}$ constitue-t-elle une approximation par défaut ou par excès de la solution exacte $x_0 \in [1, 3/2]$ de (†) ? Justifiez.

Question III

De façon très simplifiée, on peut décrire la distribution verticale du phytoplancton au sein de l'océan au moyen du modèle

$$\kappa \frac{d^2P}{dz^2} - \gamma P + \mu e^{-\alpha z} = 0$$

$$\lim_{z \to +\infty} P(z) \in \mathbb{R}, \qquad \kappa \left.\frac{dP}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

où z désigne la profondeur ($z = 0$ à la surface), κ est le coefficient de diffusion turbulente, γ le taux de mortalité (broutage par le zooplancton) du phytoplancton, μ est le taux de croissance maximum et α le coefficient d'extinction de la lumière dans la colonne d'eau. Les paramètres κ, γ, μ et α sont des constantes strictement positives.

i. Déterminez $P(z)$ dans le cas général où $\gamma \neq \alpha^2 \kappa$.

ii. Déterminez $P(z)$ dans le cas particulier où $\gamma = \alpha^2 \kappa$.

Question IV

Déterminez les extrema de

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$$

sur

$$\mathtt{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}$$

Question I

i. Une fonction f est dite négligeable par rapport à une fonction g au voisinage de $+\infty$, ce que l'on note
$$f(x) = o\big[g(x)\big], \quad (x \to +\infty)$$
si et seulement si
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_\varepsilon(+\infty))(\forall x \in V_\varepsilon(+\infty)) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$
S'il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel $g(x) \neq 0$, alors
$$f(x) = o\big[g(x)\big], (x \to +\infty) \qquad \text{ssi} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
Par exemple, la fonction $1/x^2$ est négligeable par rapport à la fonction $1/x$ dans le voisinage de $+\infty$. On a en effet
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x^2}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ii. Cet énoncé est faux, comme le montre le contre-exemple suivant :
$$\cos x \sim 1 + x, \quad (x \to 0)$$
puisque
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+x} = 1$$
Or, $\cos x$ présente un maximum en $x = 0$ alors que la fonction $1 + x$ ne présente aucun extremum.

iii. Si
$$\alpha x y_1(x) + \beta x y_2(x) = 0 \quad \forall x \in]2,3[$$
alors
$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \forall x \in]2,3[$$
et donc $\alpha = \beta = 0$ puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes sur $]2,3[$.
En conclusion,
$$\alpha x y_1(x) + \beta x y_2(x) = 0 \quad \forall x \in]2,3[\quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$
et $xy_1(x)$ et $xy_2(x)$ sont bien linéairement indépendantes sur $]2,3[$.

iv. Par application du théorème de dérivation des fonctions composées à la fonction $\rho(x,y,z,t) = R[T(x,y,z,t), S(x,y,z,t)]$, on peut écrire
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}$$

Pour pouvoir écrire la formule ci-dessus, il suffit que les hypothèses du théorème soient vérifiées, c'est-à-dire que les fonctions réelles T et S soient dérivables sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$ et que la fonction R soit continûment dérivable sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$ tel que $[T(x,y,z,t), S(x,y,z,t)] \in \omega$ pour tout $(x,y,z,t) \in \Omega$.

v. Par définition du rotationnel du champ vectoriel $\mathbf{f}$, on sait que
$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$
Par définition de la divergence du champ vectoriel $\mathbf{g}$, on sait que
$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

On a donc

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} = 0$$

où l'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées peut être justifiée par l'hypothèse $\mathbf{f} \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

Question II

i. Si la fonction réelle f est 2 fois continûment dérivable sur un intervalle $[a,x]$ (ou $[x,a]$) et 3 fois dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant $]a,x[$ (ou $]x,a[$), alors il existe au moins un point $\xi \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \qquad (\heartsuit)$$

ii. (a) La fonction $x + \operatorname{arctg} x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 en $a = 1$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

(b) Le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ est donné par les trois premiers termes du second membre de $(\heartsuit)$ où $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ et $a = 1$. L'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante est le quatrième terme.

D'une part, il vient successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \operatorname{arctg} x & f(1) &= 1 + \frac{\pi}{4} \\ f'(x) &= 1 + \frac{1}{1+x^2} & f'(1) &= \frac{3}{2} \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4}$$

D'autre part, on calcule également

$$f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

de sorte que le reste peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{(x-1)^3}{6} \frac{6\xi^2 - 2}{(1+\xi^2)^3} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,1[)$$

(c) Si $x \in [1, 3/2]$, on a $\xi \in]1, x[\subset [1, 3/2]$ et

$$|f'''(\xi)| = f'''(\xi) = \frac{6\xi^2 - 2}{(1+\xi^2)^3} \leq \frac{6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}{(1+(1)^2)^3} = \frac{23}{16}$$

Le reste $\mathcal{R}_2$ peut donc être majoré selon

$$|\mathcal{R}_2(x)| = \mathcal{R}_2(x) \leq \frac{(x-1)^3}{6}\frac{23}{16} \leq \frac{(\frac{3}{2}-1)^3}{6}\frac{23}{16} = \frac{23}{768} = C$$

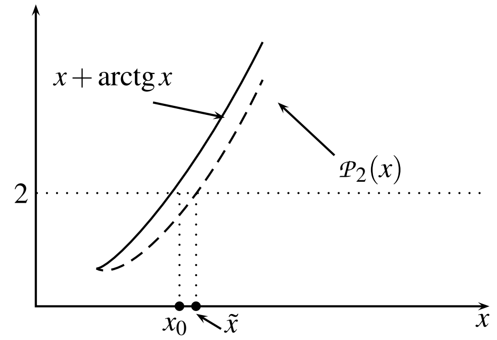
Remarque : *Remarquons qu'on peut obtenir une majoration plus précise de l'erreur en étudiant en détail les variations de f'''. On peut vérifier que*

$$f^{(4)}(\xi) = -24\frac{\xi(\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^4} < 0 \quad \forall \xi > 1$$

Puisque $f'''(\xi)$ est positive et décroissante sur $]1, 3/2]$, son maximum est réalisé en $\xi = 1$ où $f'''(1) = 1/2$. Dès lors, on peut écrire

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{(x-1)^3}{6}\frac{1}{2} =\leq \frac{(\frac{3}{2}-1)^3}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{96}$$

(d) Le reste $\mathcal{R}_2(x)$ étant positif sur $[1, 3/2]$, le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ sous-estime $x + \operatorname{arctg} x$ sur cet intervalle. Les fonctions $x + \operatorname{arctg} x$ et $\mathcal{P}_2$ étant strictement croissantes sur $[1, 3/2]$, on a schématiquement



Dès lors, $\tilde{x}$ constitue une approximation par excès de la solution exacte x_0.

Question III

i. L'équation donnée peut s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{d^2P}{dz^2} - \frac{\gamma}{\kappa}P = -\frac{\mu}{\kappa}\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{1}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants et non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée

$$\frac{d^2P}{dz^2} - \frac{\gamma}{\kappa}P = 0$$

et d'une solution particulière de l'équation complète.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène s'écrit

$$x^2 - \frac{\gamma}{\kappa}$$

Il admet deux zéros réels distincts $x = \pm\sqrt{\gamma/\kappa}$ qui conduisent, quelles que soient les valeurs des paramètres, à

$$P_h(z) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right)$$

La forme du second membre de (1) suggère d'exploiter la méthode de l'exponentielle-polynôme pour en rechercher une solution particulière.

Puisque $\gamma \neq \alpha^2\kappa$, le coefficient multipliant la variable z dans l'argument de l'exponentielle du second membre de (1) n'est pas un zéro du polynôme caractéristique et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$P_{p_1}(z) = A\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

où A est déterminée en substituant cette expression dans (1), soit

$$A\alpha^2\,\mathrm{e}^{-\alpha z} - \frac{\gamma}{\kappa} A\,\mathrm{e}^{-\alpha z} = -\frac{\mu}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

qui conduit à

$$A = \frac{\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}$$

et donc à

$$P_{p_1}(z) = \frac{\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

Finalement, la solution générale de (1) s'écrit, dans ce cas,

$$P(z) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right) + \frac{\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

où les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées en utilisant les conditions aux limites.
La condition

$$\lim_{z \to +\infty} P(z) \in \mathbb{R}$$

ne peut être vérifiée que si $C_1 = 0$.
La condition limite à la surface

$$\kappa \left.\frac{dP}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

donne alors, puisque $\kappa \neq 0$,

$$\left. -C_2\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right) - \frac{\alpha\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\right|_{z=0} = 0$$

soit

$$C_2\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}} + \frac{\alpha\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa} = 0$$

d'où

$$C_2 = -\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma}}\left(\frac{\alpha\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\right)$$

Dans le cas $\gamma \neq \alpha^2\kappa$, la solution du problème posé est donc

$$P(z) = \frac{\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\left[-\alpha\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\, z\right) + \mathrm{e}^{-\alpha z}\right]$$

ii. Si $\gamma = \alpha^2\kappa$, l'équation à résoudre devient

$$\frac{d^2P}{dz^2} - \alpha^2 P = -\frac{\mu}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{2}$$

et la solution de l'équation homogène s'écrit, comme dans le cas précédent,

$$P_h(z) = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha z} + C_2\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

Le coefficient multipliant la variable z dans le second membre de (2) est cette fois un zéro simple polynôme caractéristique et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$P_{p_2}(z) = B\,z\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

où B est déterminée en substituant cette expression dans (2), soit

$$-2\alpha B\,\mathrm{e}^{-\alpha z} + \alpha^2 B\,z\,\mathrm{e}^{-\alpha z} - \alpha^2 B\,z\,\mathrm{e}^{-\alpha z} = -\frac{\mu}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

qui conduit à

$$B = \frac{\mu}{2\alpha\kappa}$$

et donc à

$$P_{p_2}(z) = \frac{\mu}{2\alpha\kappa} z\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

Finalement, la solution générale de l'équation s'écrit dans ce cas

$$P(z) = C_1\,\mathrm{e}^{\alpha z} + C_2\,\mathrm{e}^{-\alpha z} + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} z\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

Comme dans le cas précédent, la condition imposée pour $z \to +\infty$ exige que $C_1 = 0$. La condition limite à la surface se traduit, quant à elle, par

$$\frac{\mu}{2\alpha\kappa}\,\mathrm{e}^{-\alpha z} - \alpha\left(C_2 + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} z\right)\mathrm{e}^{-\alpha z}\Big|_{z=0} = 0$$

et donc par

$$\frac{\mu}{2\alpha\kappa} - \alpha C_2 = 0$$

d'où

$$C_2 = \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa}$$

Dans le cas $\gamma = \alpha^2\kappa$, la solution du problème posé est donc

$$P(z) = \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa}(1 + \alpha z)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

Méthode alternative

Une autre façon de déterminer la solution dans le cas particulier $\gamma = \alpha^2\kappa$ consiste à prendre la limite de la solution du point i.. Soit,

$$P(z) = \lim_{\alpha \to \sqrt{\gamma/\kappa}} \frac{\mu}{\gamma - \alpha^2\kappa}\left[-\alpha\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\,z\right) + \mathrm{e}^{-\alpha z}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

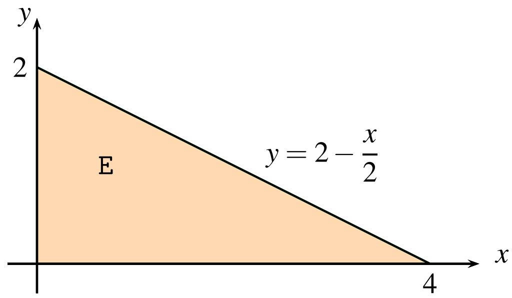
Il s'agit d'une indétermination qui peut être levée par la règle de l'Hospital. On a alors

$$\begin{aligned}
P(z) &= \mu \lim_{\alpha \to \sqrt{\gamma/\kappa}} \frac{\dfrac{d}{d\alpha}\left[-\alpha\sqrt{\dfrac{\kappa}{\gamma}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\,z\right) + \mathrm{e}^{-\alpha z}\right]}{\dfrac{d}{d\alpha}(\gamma - \alpha^2\kappa)} \\
&= \mu \lim_{\alpha \to \sqrt{\gamma/\kappa}} \frac{-\sqrt{\dfrac{\kappa}{\gamma}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\,z\right) - z\,\mathrm{e}^{-\alpha z}}{-2\alpha\kappa} = \mu\,\frac{\left(\sqrt{\dfrac{\kappa}{\gamma}} + z\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}}\,z\right)}{2\sqrt{\gamma\kappa}} \\
&= \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa}(1 + \alpha z)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}
\end{aligned}$$

où la dernière expression est obtenue en utilisant la condition $\gamma = \alpha^2\kappa$.

Question IV

La fonction
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$$
étant continue sur le compact $\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 4\}$, c'est-à-dire sur le triangle représenté ci-dessous, elle réalise ses bornes supérieures et inférieures en des points de ce compact.



Puisque f est partout dérivable, les extrema sont situés soit en des points stationnaires de f à l'intérieur de $\mathtt{E}$, soit en des points de la frontière de $\mathtt{E}$.

Les éventuels points stationnaires de f vérifient
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y = (2x-y-1)\mathbf{e}_x + (2y-x-1)\mathbf{e}_y = \mathbf{0}$$
soit
$$\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 2y-x-1=0 \end{cases}$$

On trouve le seul point stationnaire $(1,1)$ qui se trouve bien à l'intérieur de $\mathtt{E}$.

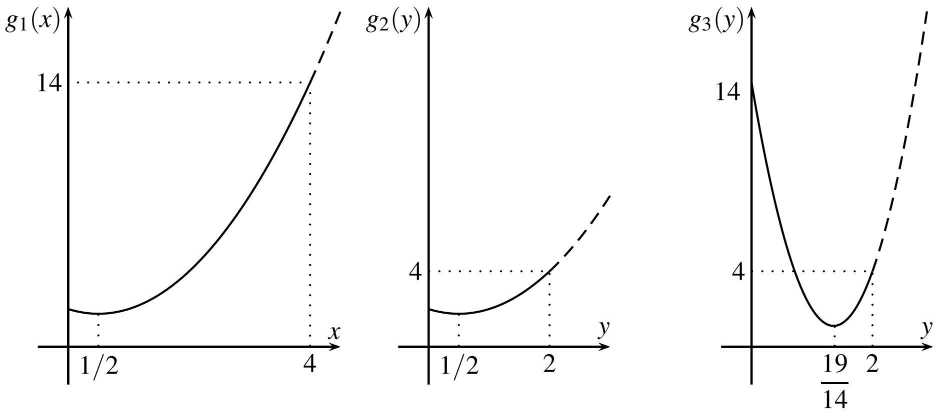
Afin de déterminer la nature de ce point stationnaire, calculons-y la matrice Hessienne. On a
$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne est constante sur $\mathbb{R}^2$. Le critère de Sylvester nous assure qu'elle est définie positive puisque ses mineurs diagonaux principaux, valant respectivement 2 et 3, sont strictement positifs. Le point stationnaire correspond donc à un minimum local de f. En ce point, la fonction f prend la valeur $f(1,1) = 1$.

Remarquons aussi que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$, ce dont on peut déduire que le minimum local identifié est aussi le minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathtt{E}$.

La frontière de $\mathtt{E}$ est constituée des trois segments
$$s_1 = \{(x,y) : x \in [0,4], y = 0\},\;\; s_2 = \{(x,y) : x = 0, y \in [0,2]\}$$
et
$$s_3 = \{(x,y) : y \in [0,2],\; x = 4-2y\}$$
sur lesquels les variations des valeurs de la fonction f sont décrites respectivement par les fonctions
$$g_1(x) = f(x,0) = x^2 - x + 2, \qquad g_2(y) = f(0,y) = y^2 - y + 2$$
et
$$g_3(y) = f(4-2y, y) = 7y^2 - 19y + 14$$

Les graphes de ces fonctions peuvent être esquissés comme suit :



Le maximum de la fonction f est donc réalisé au sommet $(4,0)$ du triangle où

$$f(4,0) = g_1(4) = g_3(0) = 14$$

On remarque que les minima des paraboles, $g_1(1/2) = g_2(1/2) = 7/4$ et $g_3(19/14) \approx 1.1$, sont supérieurs au minimum trouvé à l'intérieur du domaine, comme attendu vu la convexité de f sur $\mathbb{R}_2$.

En conclusion, le maximum de la fonction f sur le domaine $\mathtt{E}$ vaut 14 et est réalisé au point $(4,0)$ et le minimum vaut 1 et est réalisé en $(1,1)$.